Čtvrtá demonstrovaná cvičení k MB103

Úlohy z domácí sady druhého týdne

Příklad 1. Ukažte, že funkce

$$f(x, y) = x^3 - 12xy + 48x - by^2$$

dvou reálných proměnných, závisící na parametru b, má dva, jeden, resp. žádný stacionární bod podle toho, zda je $|b|$ menší, rovna nebo větší než 3. Rozhodněte o typu příslušných extrémů (pokud existují) pro $b = 0$ a $b = 3$.

Příklad 2. Teplota jednotlivých bodů na jednotkové sféře v $\mathbb{R}^3$ je dána vzorcem

$$T(x, y, z) = 1 + xy + yz.$$

Určete nejteplejší místo na sféře.

Příklad 3. Zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dáno vztahem $F(x, y) = xy \sin(\frac{\pi}{2}xy)$. Ukažte, že existuje funkce $f : U \to \mathbb{R}$ definovaná na okolí čísla $1 \in \mathbb{R}$ taková, že $F(x, f(x)) = 1$ pro všechna $x \in U$ a $f(1) = 1$. Spočtěte derivaci $f'(1)$ (aniž byste vyjadřovali explicitně funkci f). Existuje taková funkce také s předepsanou hodnotou $f(1) = 0$?

Nové úlohy

Úloha 1. Kvádr se stranami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami má všechny vrcholy na povrchu elipsoidu

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 1.$$

Označte (x, y, z) vrchol v kvadrantu s kladnými hodnotami souřadnic a najděte takovou hodnotu jeho souřadnic, pro kterou bude povrch kvádru maximální.

[Vyjde povrch 4]

Objem prostorového útvaru U je dán integrálem charakteristické funkce (jednička pro body U, nula jinak).

Objem prostorového útvaru mezi rovinou souřadných os xy a grafem nezáporné funkce $z = f(x, y)$ nad oblastí M v rovině je dán integrálem

$$V = \int_M f(x, y) dx\, dy.$$

Úloha 2. Spočtěte objem elipsoidu $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

[$4/3abc$]

Úloha 3. Sklenička na whisku je vysoustružena z ledu jako prostor mezi paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a válcem $x^2 - y^2 - 1 = 0$. V jakém poměru bude smísena whiska s vodou, jestliže plnou takovouto skleničku whisky necháme roztát ve větší jinak prázdné nádobě?

[půl na půl]

Povrch plochy dané grafem funkce jako výše je dán

$$S = \int_M \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx\, dy$$

Úloha 4. Spočtěte plochu povrchu objektu daného $z = 1 - (x^2 + y^2)^{3/2}$ a $z \geq 0$.

Jednotlivé souřadnice těžiště objektu M se počítají intgrálem $\int_M x dx\, dy\, dz$ a po řadě totéž s y a z.