

PB165 – Grafy a sítě

Základní pojmy teorie grafů

17. září 2007

- 1 Základní pojmy teorie grafů
- 2 Stromy
- 3 Kostra grafu, algoritmy nalezení
- 4 Prohledávání grafu, hledání nejkratší cesty
- 5 Toky v sítích
- 6 Algoritmy směrování a přepínání
- 7 Peer-to-peer síť

Proč právě grafy a sítě?

- Teorie grafů je důkladně rozpracována a nabízí mnoho využitelných algoritmů.
- Graf představuje velmi přímočarou reprezentaci sítě na všech úrovních OSI modelu, např.:
 - Síťové prvky a jejich fyzické propojení na nejnižší vrstvě,
 - síťové aplikace a TCP spojení mezi nimi na transportní vrstvě,
 - procesy distribuovaného výpočtu a jejich komunikace na aplikační vrstvě.
- Grafy nacházejí využití i v návrhu síťových protokolů a jejich formální verifikaci.

Graf je abstraktní pojem matematiky a informatiky užitečný pro modelování reálných objektů, situací. Intuitivně se graf skládá z:

- *Vrcholů (uzlů)*, znázorňovaných schematicky jako „body“,
- *hran* spojujících vrcholy.

Co lze reprezentovat grafem?

- Mapu měst a silničního spojení,
- atomy v molekule a jejich vazby,
- vodovodní, elektrické sítě

a zejména

- počítačové sítě.

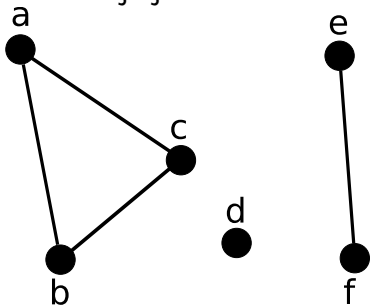
Označován také jako *jednoduchý* graf.

Definice

Graf G je uspořádaná dvojice množin (V, E) , kde

- V je množina vrcholů a
- E je množina hran – dvouprvkových podmnožin V

Vrcholy spojené hranou se nazývají *sousední*. Hrana se označuje jako *incidentní* k vrcholům, které spojuje.



$$G = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$V = \left\{ \begin{array}{l} \{a, b\}, \\ \{a, c\}, \\ \{b, c\}, \\ \{e, f\} \end{array} \right\}$$

Hrany v grafu, jak byly definovány, spojují dva rovnocenné vrcholy. Takové grafy se také nazývají *neorientované*. U hran ovšem můžeme vyznačit směr, kterým vedou – hrany i graf se poté nazývají *orientované*.

Definice

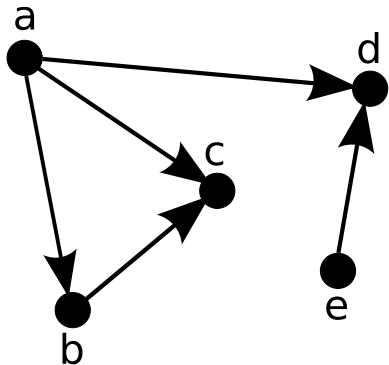
Graf, jehož hrany jsou uspořádané dvojice vrcholů, se nazývá orientovaný.

O hraně (u, v) říkáme, že vychází z vrcholu u a vstupuje do v . Graficky se orientace hrany označí šipkou ve směru, kterým hrana vede.

Orientovaný graf - příklady

Kde najdeme orientované grafy v sítích?

- Webové stránky – graf odkazů
- DNS – hierarchická struktura domén, serverů
- Směrování – graf cest paketů k cíli



$$G = \{a, b, c, d, e\}$$
$$V = \left\{ \begin{array}{l} (a, b), \\ (a, c), \\ (b, c), \\ (a, d), \\ (e, d) \end{array} \right\}$$

Definice grafu povoluje nejvýše 1 hranu mezi každou dvojicí vrcholů a požaduje, aby hrana spojovala různé vrcholy. Tato omezení odstraňuje multigraf:

Definice

Multigraf je graf, jenž nahrazuje množinu hran multimnožinou (smí obsahovat násobné prvky) a umožňuje existenci smyček – hran spojujících vrchol sám ze sebou.

Multigraf lépe odpovídá reálným fyzickým sítím, kde se často vyskytují redundantní linky.

Smyčky mohou znázornit např. loopback – rozhraní přijímající zprávy, které samo vysílá.

Vrcholům a hranám je možné přiřadit např. číslo či barvu.

Definice

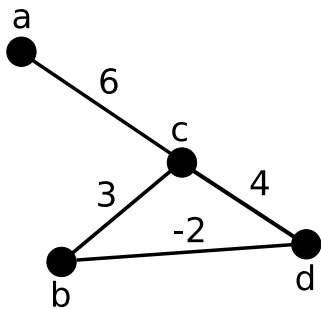
Přiřazení prvků konečné množiny vrcholům či hranám grafu nazýváme jejich ohodnocením.

Příklady ohodnocení na sítích:

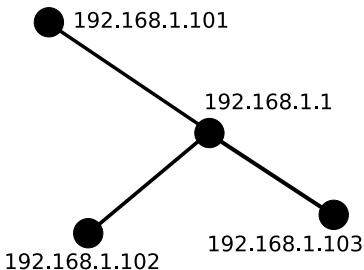
- Ohodnocení síťových zařízení L2 a L3 adresami (viz ARP protokol)
- Šířka pásma, latence, cena přenosu za jednotku dat jako ohodnocení linek – hran
- Ohodnocení vrcholů názvem stavu, hran typem zprávy při abstraktním návrhu protokolů (MSC¹)

¹Message Sequence Charts

Ohodnocení – příklady



Hranově ohodnocený
graf



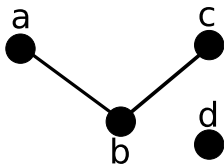
Vrcholově ohodnocený
graf

Definice

Stupněm vrcholu v neorientovaném grafu nazýváme počet hran incidentních k vrcholu.

- Počet klientů připojených k Wi-Fi AP
- Počet uzavřených spojení spojovaného protokolu (např. TCP)

Stupeň vrcholu u značíme $deg(u)$.



$$deg(a) = deg(c) = 1$$

$$deg(b) = 2$$

$$deg(d) = 0$$

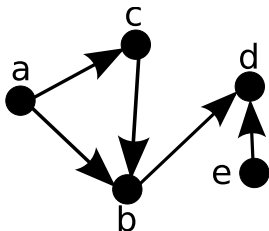
Stupeň vrcholu v orientovaném grafu

V případě orientovaného grafu rozlišujeme *vstupní* a *výstupní* stupeň.

Definice

Vstupním (výstupním) stupněm vrcholu u neorientovaného grafu nazýváme počet hran vstupujících do, resp. vycházejících z, vrcholu u a značíme jej $\text{deg}^+(u)$, resp. $\text{deg}^-(u)$.

- V grafu odkazů mezi webovými stránkami reprezentuje vstupní vrchol počet odkazů na stránku vedoucích.



<i>vrchol</i>	deg^-	deg^+
<i>a</i>	2	0
<i>b</i>	1	2
<i>c</i>	1	1
<i>d</i>	0	2
<i>e</i>	1	0

Definice

Sledem v grafu (neorientovaném grafu) nazýváme posloupnost vrcholů a hran

$$v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n,$$

kde každá hrana e_i spojuje vrcholy v_{i-1}, v_i , resp. vede z v_{i-1} do v_i .

Sled v grafu je tedy „trasou“, na které se mohou vrcholy i hrany opakovat. Se sledy se lze setkat i v reálných sítích:

- Cesta paketu sítí (některé směrovací algoritmy nezabraňují zacyklení paketu v průběhu výpočtu).
- Transakce v SIP protokolu (viz SIP ellipse).

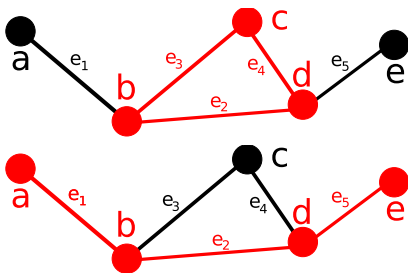
Samostatný vrchol je také sledem.

Definice

Cesta v grafu je sled bez opakování vrcholů.

V cestě se v důsledku neopakování vrcholů nemohou opakovat ani hrany.

- Cesty definující směrování paketů mezi dvojicemi síťových prvků.



$b, e_3, c, e_4, d, e_2, b$ je sledem v grafu, ale nikoliv cestou – vrchol b se opakuje.
 $a, e_1, b, e_2, d, e_5, e$ je sledem i cestou v grafu.

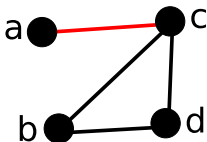
Definice

Neorientovaný graf se nazývá souvislý, pokud mezi každými dvěma jeho vrcholy vede cesta.

Definice

Nahradíme-li všechny hrany orientovaného grafu G neorientovanými a získáme-li tak souvislý graf, G je slabě souvislý.

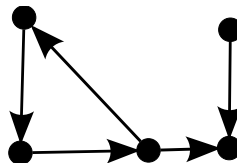
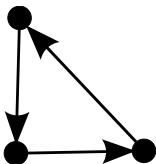
Orientovaný graf je silně souvislý, pokud mezi každými dvěma jeho vrcholy vedou cesty v obou směrech.



Tento graf je souvislý; po odebrání vyznačené hrany by souvislý nebyl, odebrání jedné z nevyznačených hran by jeho souvislost zachovalo.

Souvislost grafu – příklady

- Internet na fyzické vrstvě tvoří souvislý graf. (?)
- Internet na IP vrstvě tvoří slabě souvislý (ovšem silně nesouvislý) orientovaný graf (adresy za NAT).
- Orientovaný graf webových stránek není silně ani slabě souvislý.



Grafy na obrázcích jsou:

- 1 Nesouvislý
- 2 Slabě souvislý
- 3 Silně souvislý

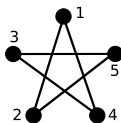
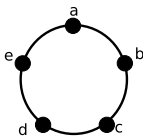
Isomorfismus grafů

Grafy, lišící se např. nakreslením, označením vrcholů a hran, ohodnocením, se nemusejí lišit svojí strukturou – mohou být isomorfní.

Definice

Isomorfismus mezi grafy G, H je bijektivní zobrazení vrcholů, které zachovává hrany – tj. pokud vede v grafu G hrana mezi vrcholy u, v , pak v grafu H vede hrana mezi vrcholy $f(u), f(v)$. Pokud mezi grafy G, H existuje isomorfismus, nazývají se isomorfní.

Isomorfismus (jelikož je relací ekvivalence) tak definuje třídy grafů, které lze považovat za totožné.



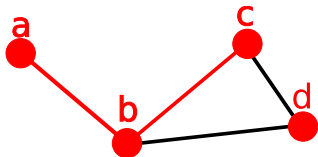
- Co musejí isomorfní grafy splňovat?
 - Mít stejný počet vrcholů.
 - Mít stejný počet hran.
 - Jejich vrcholy musejí mít stejné stupně.
- V mnoha případech je snadné dokázat, že grafy isomorfní nejsou pomocí těchto (a některých dalších) invariantů. Jsou-li tyto invarianty shodné, je nutno vyloučit všechny možné isomorfismy.
- Důkaz isomorfie dvou grafů vyžaduje přímo nalezení konkrétního isomorfismu mezi těmito grafy.

Definice

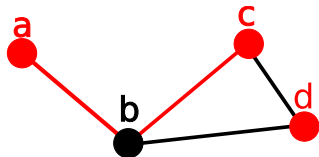
Graf H je podgrafem grafu G , pokud platí následující podmínky:

- 1 Vrcholy grafu H tvoří podmnožinou vrcholů grafu G .
- 2 Hraný grafu H tvoří podmnožinou hran grafu G .
- 3 Hraný grafu H mají oba vrcholy v H .

Graf G je poté nadgrafem grafu H .



Vyznačené vrcholy a hrany tvoří podgraf.

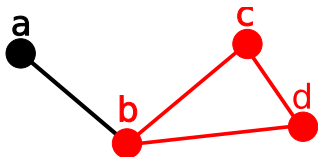


Vyznačené vrcholy a hrany tvoří podgraf.

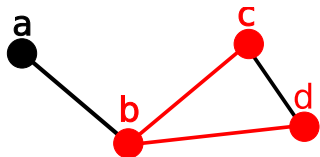
Definice

Podgraf H se nazývá indukovaný, pokud obsahuje všechny hrany, které mezi jeho vrcholy vedou v nadřazeném grafu G .

- Lokální síť je indukovaným podgrafem Internetu na fyzické vrstvě.
- Samostatné vrcholy libovolného grafu tvoří jeho podgraf.



Vyznačené vrcholy a hrany tvoří indukovaný podgraf.



Vyznačené vrcholy a hrany tvoří indukovaný podgraf.

Jak efektivně uložit graf v paměti počítače či aktivního síťového prvku?

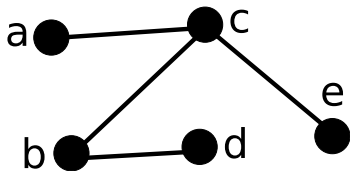
Vrcholy označíme čísly $1 \dots n$. Pro uložení hran máme dvě základní možnosti:

- *Matice sousednosti*
- *Seznamy sousedů*

Matice sousednosti

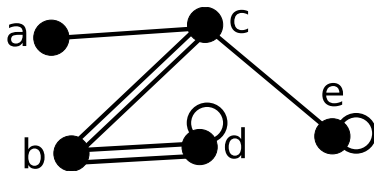
- Matice E o rozměrech $n \times n$ pro n vrcholů grafu
- $E_{ij} = 1$ pokud hrana (i, j) patří do grafu
- $E_{ij} = 0$ jinak
- Pro neorientovaný graf je symetrická, pro orientovaný nemusí

Matrice susednosti



	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	0	0	1	0	0
<i>b</i>	0	0	1	1	0
<i>c</i>	1	1	0	0	1
<i>d</i>	0	1	0	0	0
<i>e</i>	0	0	1	0	0

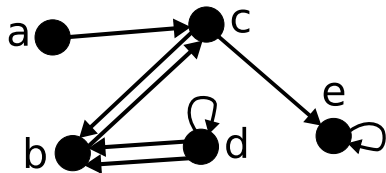
V této podobě je matice susednosti vhodná jen pro reprezentaci jednoduchého grafu. Multigraf lze reprezentovat maticí susednosti, jejíž prvky udávají počet hran mezi každými dvěma vrcholy:



	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	0	0	1	0	0
<i>b</i>	0	0	2	2	0
<i>c</i>	1	2	0	0	1
<i>d</i>	0	2	0	1	0
<i>e</i>	0	0	1	0	1

Obdobně lze ukládat jednoduchý hranově ohodnocený graf.

Matice sousednosti pro orientovaný multigraf

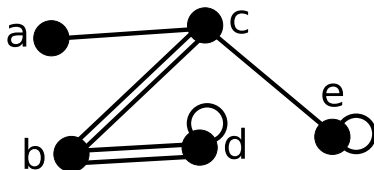


	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	0	0	1	0	0
<i>b</i>	0	0	1	0	0
<i>c</i>	0	1	0	0	1
<i>d</i>	0	2	0	1	0
<i>e</i>	0	0	0	0	1

Pro každý vrchol existuje samostatný seznam sousedů, s nimiž je tento spojen hranou (či do nich vede orientovaná hrana).

- Lze implementovat pomocí 2 jednorozměrných polí:
 - V jednom jsou uloženy všechny seznamy za sebou, seřazené podle čísla vrcholu
 - Druhé uchovává indexy, na kterých začínají v prvním poli sousedé každého vrcholu
- Násobné hrany v multigrafu jsou zadány násobným uvedením vrcholu v seznamu sousedů
- Pro „řidké“ grafy (výrazně méně než n^2 hran) jsou seznamy sousedů výhodnější z hlediska paměťové náročnosti než matice sousednosti. Takových grafů je mezi sítěmi většina.

Seznamy sousedů – příklad



Pole indexů do seznamu sousedů:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
1	2	6	10	13

Seznam sousedů:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
c	c	c	d	d	a	b	b	e	b	b	d	c	e

- 1 Nakreslete všechny neisomorfní grafy na:
 - 1 3 vrcholech
 - 2 4 vrcholech
 - 3 5 vrcholech
- 2 Dokažte, že platí $\sum_{y \in V(G)} \deg(y) = 2|E(G)|$ pro neorientovaný graf.
- 3 Mohou dva grafy, orientovaný a neorientovaný, mít stejné matice sousednosti a zároveň stejné počty hran? Jak takové grafy vypadají?
- 4 Uvažme orientovaný graf, který reprezentuje relace na množině vrcholů tak, že hrana spojuje právě ty prvky, které jsou spolu v relaci. Jakou strukturu bude mít graf reprezentující:
 - 1 tranzitivní relaci
 - 2 relaci ekvivalence