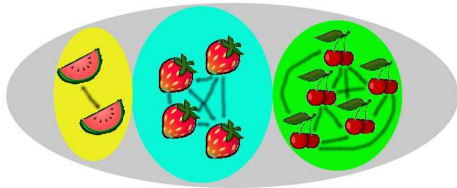


## 4 Binární relace, Ekvivalence

Na pojem relace velmi brzo narazí (snad) každý informatik při studiu relačních databází. Není to však jen tato oblast, ale i jiná místa informatiky, kde se relace skrývají či přímo explicitně objevují. Nejčastěji se takto setkáme s binárními relacemi, například vždy, když rozdělujeme objekty podle „shodných“ znaků (relace ekvivalence), nebo když objekty mezi sebou „srovnáváme“ (relace uspořádání).



### Stručný přehled lekce

- \* Reprezentace relací, tabulkou a grafem.
- \* Základní vlastnosti binárních relací.
- \* Relace ekvivalence, neboli rozklady množin.

## Zopakování pojmu relace

**Definice 4.0. Relace** mezi množinami  $A_1, \dots, A_k$ , pro  $k \in \mathbb{N}$ , je **libovolná** podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times \dots \times A_k. \square$$

Pokud  $A_1 = \dots = A_k = A$ , hovoříme o  **$k$ -ární relaci na  $A$** .  $\square$

Takže **binární relace**  $R$  (pro  $k = 2$ ) je

$$R \subseteq A \times A. \square$$

Příklady relací.

- $\{(1, a), (2, a)\}$  je relace mezi  $\{1, 2, 3\}$  a  $\{a, b\}$ .
- $\{(i, 2i) \mid i \in \mathbb{N}\}$  je binární relace na  $\mathbb{N}$ .  $\square$
- $\{(i, j, i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  je ternární relace na  $\mathbb{N}$ .
- Relace „mít rychlejší počítač“ je binární relací mezi studenty FI.

## 4.1 Reprezentace konečných relací

**Příklad 4.1.** *Tabulky relační databáze.*

Definujme následující množiny („elementární typy“)

- $ZNAK = \{a, \dots, z, A, \dots, Z, mezera\}$ ,
- $CISLICE = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . □

Dále definujeme tyto množiny („odvozené typy“)

- $JMENO = ZNAK^{15}$ ,  $PRIJMENI = ZNAK^{20}$ ,
- $VEK = CISLICE^3$ ,
- $ZAMESTNANEC \sim JMENO \times PRIJMENI \times VEK$ . □

Relaci „typu“  $ZAMESTNANEC$  pak lze reprezentovat tabulkou:

JMENO	PRIJMENI	VEK
Jan	Novák	42
Petr	Vichr	28
Pavel	Zíma	26

 □

*Relační databáze* je konečná množina tabulek. *Schéma databáze* je (zjednodušeně řečeno) množina „typů“ jednotlivých tabulek.

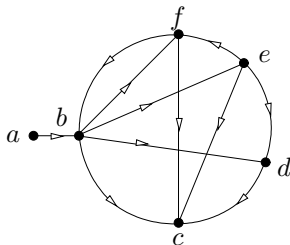
## Reprezentace binárních relací na množině

**Značení:** Binární relaci  $R \subseteq M \times M$  lze jednoznačně znázornit jejím *grafem*.

- Prvky  $M$  znázorníme jako body v rovině.
- Prvek  $(a, b) \in R$  znázorníme jako *orientovanou hranu* („šipku“) z  $a$  do  $b$ .  
Je-li  $a = b$ , pak je touto hranou „smyčka“ na  $a$ . □

Pozor, nejedná se o „grafy funkcí“ známé z analýzy.

Například mějme  $M = \{a, b, c, d, e, f\}$  a  $R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (d, c), (e, c), (f, c), (e, d), (e, f), (f, b)\}$ , pak:



V případě, že  $R$  je nekonečná nebo „velká“, může být reprezentace  $R$  jejím grafem nepraktická (záleží pak na míře „pravidelnosti“  $R$ ).

## 4.2 Vlastnosti binárních relací

**Definice 4.2.** Necht'  $R \subseteq M \times M$ . Binární relace  $R$  je

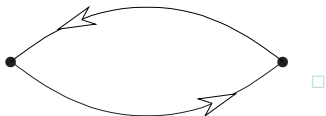
- *reflexivní*, právě když pro každé  $a \in M$  platí  $(a, a) \in R$ ;



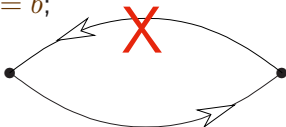
- *ireflexivní*, právě když pro každé  $a \in M$  platí  $(a, a) \notin R$ ;



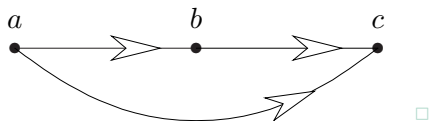
- *symetrická*, právě když pro každé  $a, b \in M$  platí, že jestliže  $(a, b) \in R$ , pak také  $(b, a) \in R$ ;



- *antisymetrická*, právě když pro každé  $a, b \in M$  platí, že jestliže  $(a, b), (b, a) \in R$ , pak  $a = b$ ;



- **tranzitivní**, právě když pro každé  $a, b, c \in M$  platí, že jestliže  $(a, b), (b, c) \in R$ , pak také  $(a, c) \in R$ .



Následují dva základní typy binárních relací,  $R$  je

- relace **ekvivalence**, právě když je  $R$  reflexivní, symetrická a tranzitivní; □
- **částečné uspořádání**, právě když je  $R$  reflexivní, antisymetrická a tranzitivní (často říkáme jen **uspořádání**). □

**Poznámka:** Pozor, může být relace **symetrická i antisymetrická zároveň**? □ Ano!



### Příklad 4.3. Několik příkladů relací definovaných v přirozeném jazyce.

Bud'  $M$  množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace  $R \subseteq M \times M$  definované takto

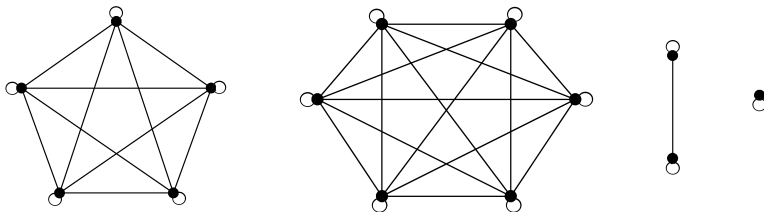
- $(x, y) \in R$  právě když  $x$  a  $y$  mají stejné rodné číslo; □
- $(x, y) \in R$  právě když  $x$  má stejnou výšku jako  $y$  (dejme tomu na celé mm); □
- $(x, y) \in R$  právě když výška  $x$  a  $y$  se neliší více jak o 2 mm; □
- $(x, y) \in R$  právě když  $x$  má alespoň takovou výšku jako  $y$ ; □
- $(x, y) \in R$  právě když  $x$  má jinou výšku než  $y$  (dejme tomu na celé mm); □
- $(x, y) \in R$  právě když  $x$  je zamilován(a) do  $y$ . □

### Příklad 4.4. Jaké vlastnosti mají následující relace?

- Bud'  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definovaná takto  $(x, y) \in R$  právě když  $x$  dělí  $y$ . □ (Částečné uspořádání, ale ne každá dvě čísla jsou porovnatelná.)
- Bud'  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definovaná takto  $(x, y) \in R$  právě když  $x$  a  $y$  mají stejný zbytek po dělení číslem 5. □ (Ekvivalence.)
- Necht'  $F = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$  je množina funkcí. Bud'  $R \subseteq F \times F$  definovaná takto  $(f, g) \in R$  právě když  $f(x) < g(x)$  pro všechna  $x$ . □ (Antisymetrická a tranzitivní, ale ne reflexivní – není uspořádání.) □

### 4.3 Relace ekvivalence

- Relace  $R \subseteq M \times M$  je *ekvivalence* právě když  $R$  je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Tyto **tři vlastnosti** je tedy třeba ověřit k důkazu toho, že daná relace  $R$  je ekvivalence. □
- Jak vypadá *graf ekvivalence*? □



- Neformálně řečeno: ekvivalence je relace  $R \subseteq M \times M$ , taková, že  $(x, y) \in R$  právě když  $x$  a  $y$  jsou v nějakém smyslu „stejné“.



Bud'  $M$  množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace  $R \subseteq M \times M$  definované takto

- $(x, y) \in R$  právě když  $x$  má stejnou výšku jako  $y$ ; □
- $(x, y) \in R$  právě když  $x$  má stejnou barvu vlasů jako  $y$ ; □
- $(x, y) \in R$  právě když  $x, y$  mají stejnou výšku a stejnou barvu vlasů; □
- $(x, y) \in R$  právě když  $x, y$  mají stejnou výšku nebo stejnou barvu vlasů. □  
(Tato relace obecně **není ekvivalence**! Proč?)

**Příklad 4.5.** Bud'  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  binární relace definovaná takto:  $(x, y) \in R$  právě když  $|x - y|$  je dělitelné třemi.

V jakém smyslu jsou zde  $x$  a  $y$  „stejné“? □ Dávají stejný zbytek po dělení třemi. □

**Příklad 4.6.** Bud'  $R$  binární relace mezi všemi studenty na přednášce FI: IB000 definovaná takto:  $(x, y) \in R$  právě když  $x$  i  $y$  sedí v první lavici. □

Proč se v tomto případě **nejedná** o relaci ekvivalence? □

Protože není reflexivní pro studenty sedící v dalších lavicích. (Takže si dávejte dobrý pozor na správné pochopení definic.) □

## 4.4 Rozklady a jejich vztah k ekvivalencím

**Definice 4.7. Rozklad.** Buď  $M$  množina.

**Rozklad (na)  $M$**  je množina podmnožin  $\mathcal{N} \subseteq 2^M$  splňující násl. tři podmínky:

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$  (tj. každý prvek  $\mathcal{N}$  je **neprázdná** podmnožina  $M$ );
- pokud  $A, B \in \mathcal{N}$ , pak buď  $A = B$  nebo  $A \cap B = \emptyset$ ;
- $\bigcup_{A \in \mathcal{N}} A = M$ .  $\square$

Prvkům  $\mathcal{N}$  se také říká **třídy rozkladu**.

- Buď  $M = \{a, b, c, d\}$ . Pak  $\mathcal{N} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$  je rozklad na  $M$ .  $\square$
- Necht'  $A_0 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 0\}$ ,  $A_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 1\}$ ,  
 $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 2\}$ .  
Pak  $\mathcal{N} = \{A_0, A_1, A_2\}$  je rozklad všech přirozených čísel  $\mathbb{N}$  podle zbytkových tříd.
- Každý rozklad  $\mathcal{N}$  na  $M$  jednoznačně určuje jistou ekvivalenci  $R_{\mathcal{N}}$  na  $M$ .

**Věta 4.8.** Buď  $M$  množina a  $\mathcal{N}$  rozklad na  $M$ . Necht'  $R_{\mathcal{N}} \subseteq M \times M$  je relace na  $M$  definovaná takto

$(x, y) \in R_{\mathcal{N}}$  právě když existuje  $A \in \mathcal{N}$  taková, že  $x, y \in A$ .

Pak  $R_{\mathcal{N}}$  je **ekvivalence** na  $M$ .  $\square$

**Důkaz:** Dokážeme, že  $R_{\mathcal{N}}$  je **reflexivní, symetrická a tranzitivní** (Def. 4.2).  $\square$

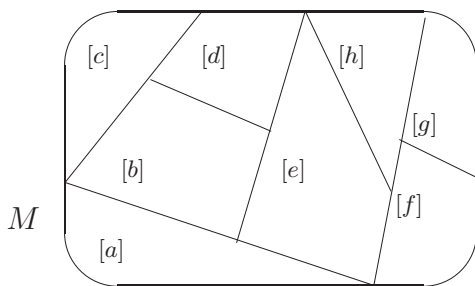
- Reflexivita: Buď  $x \in M$  libovolné. Jelikož  $\mathcal{N}$  je rozklad na  $M$ , musí existovat  $A \in \mathcal{N}$  takové, že  $x \in A$  (jinak spor se třetí podmínkou z Definice 4.7). Proto  $(x, x) \in R_{\mathcal{N}}$ , tedy  $R_{\mathcal{N}}$  je reflexivní.  $\square$
- Symetrie: Necht'  $(x, y) \in R_{\mathcal{N}}$ . Podle definice  $R_{\mathcal{N}}$  pak existuje  $A \in \mathcal{N}$  taková, že  $x, y \in A$ . To ale znamená, že také  $(y, x) \in R_{\mathcal{N}}$  podle definice  $R_{\mathcal{N}}$ , tedy  $R_{\mathcal{N}}$  je symetrická.  $\square$
- Tranzitivita: Necht'  $(x, y), (y, z) \in R_{\mathcal{N}}$ . Podle definice  $R_{\mathcal{N}}$  existují  $A, B \in \mathcal{N}$  takové, že  $x, y \in A$  a  $y, z \in B$ . Jelikož  $A \cap B \neq \emptyset$ , podle druhé podmínky z Definice 4.7 platí  $A = B$ . Tedy  $x, z \in A = B$ , proto  $(x, z) \in R_{\mathcal{N}}$  podle definice  $R_{\mathcal{N}}$ .  $\square$

Každá ekvivalence  $R$  na  $M$  jednoznačně určuje jistý rozklad  $M/R$  na  $M$ .

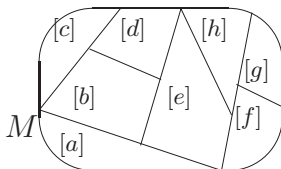
**Věta 4.9.** *Bud'  $M$  množina a  $R$  ekvivalence na  $M$ . Pro každé  $x \in M$  definujeme množinu*

$$[x] = \{y \in M \mid (x, y) \in R\}.$$

*Pak  $\{[x] \mid x \in M\}$  je rozklad na  $M$ , který značíme  $M/R$ .  $\square$*



**Důkaz:** Dokážeme, že  $M/R$  splňuje podmínky Definice 4.7.



- Pro každé  $[x] \in M/R$  platí  $[x] \neq \emptyset$ , neboť  $x \in [x]$ .  $\square$
- Necht'  $[x], [y] \in M/R$ . Ukážeme, že pokud  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ , pak  $[x] = [y]$ .  $\square$   
 Jestliže  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ , existuje  $z \in M$  takové, že  $z \in [x]$  a  $z \in [y]$ . Podle definice  $[x]$  a  $[y]$  to znamená, že  $(x, z), (y, z) \in R$ . Jelikož  $R$  je symetrická a  $(y, z) \in R$ , platí  $(z, y) \in R$ . Jelikož  $(x, z), (z, y) \in R$  a  $R$  je tranzitivní, platí  $(x, y) \in R$ . Proto také  $(y, x) \in R$  (opět ze symetrie  $R$ ).  $\square$  Nyní dokážeme, že  $[y] = [x]$ :
  - \* „ $[x] \subseteq [y]$ “: Necht'  $v \in [x]$ . Pak  $(x, v) \in R$  podle definice  $[x]$ . Dále  $(y, x) \in R$  (viz výše), tedy  $(y, v) \in R$  neboť  $R$  je tranzitivní. To podle definice  $[y]$  znamená, že  $v \in [y]$ .  $\square$
  - \* „ $[y] \subseteq [x]$ “: Necht'  $v \in [y]$ . Pak  $(y, v) \in R$  podle definice  $[y]$ . Dále  $(x, y) \in R$  (viz výše), tedy  $(x, v) \in R$  neboť  $R$  je tranzitivní. To podle definice  $[x]$  znamená, že  $v \in [x]$ .  $\square$
- Platí  $\bigcup_{[x] \in M/R} [x] = M$ , neboť  $x \in [x]$  pro každé  $x \in M$ .  $\square$