**FORMÁLNÍ JAZYKY A AUTOMATY I**

# *Řešení sady problémů* ***3.***

1. Automat $A_1$ obsahuje nedosažitelný stav $q_9$. Při aplikaci algoritmu pro minimalizaci konečného automatu obdržíme postupně následující třídy ekvivalentních stavů:

   - $I = \{q_0, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_{10}\}$
     $II = \{q_1, q_8\}$
   - $I_1 = \{q_0, q_2\}$
     $I_2 = \{q_3, q_4, q_6, q_{10}\}$
     $I_3 = \{q_5, q_7\}$
     $II = \{q_1, q_8\}$
   - $I_1 = \{q_0, q_2\}$
     $I_2' = \{q_3\}$
     $I_2'' = \{q_4, q_6\}$
     $I_2''' = \{q_{10}\}$
     $I_3 = \{q_5, q_7\}$
     $II = \{q_1, q_8\}$

   Automat $A_2$ neobsahuje nedosažitelné stavy a je minimální. Po převedení obou automatů do kanonického tvaru obdržíme v obou případech následující automat:

$$K = [\{1,2,3,4,5,6\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{1\}]$$

$$\begin{array}{rcl}
\delta(1,a) & = & 2 \\
\delta(1,b) & = & 3 \\
\delta(2,a) & = & 4 \\
\delta(2,b) & = & 1 \\
\delta(3,a) & = & 1 \\
\delta(3,b) & = & 5 \\
\delta(4,a) & = & 6 \\
\delta(4,b) & = & 2 \\
\delta(5,a) & = & 3 \\
\delta(5,b) & = & 6 \\
\delta(6,a) & = & 6 \\
\delta(6,b) & = & 6
\end{array}$$

   Tedy automaty $A_1$ a $A_2$ jsou ekvivalentní.

2. Deterministický konečný automat je určen následující tabulkou:

| | | a | b |
|---|---|---|---|
| $\longrightarrow$ | 0 | 0 | 01 |
| | 01 | 02 | 012 |
| | 02 | 03 | 013 |
| | 03 | 04 | 014 |
| $\longleftarrow$ | 04 | 0 | 01 |
| | 012 | 023 | 0123 |
| | 013 | 024 | 0124 |
| $\longleftarrow$ | 014 | 02 | 012 |
| | 023 | 034 | 0134 |
| $\longleftarrow$ | 024 | 03 | 013 |
| $\longleftarrow$ | 034 | 04 | 014 |
| | 0123 | 0234 | 01234 |
| $\longleftarrow$ | 0124 | 023 | 0123 |
| $\longleftarrow$ | 0134 | 024 | 0124 |
| $\longleftarrow$ | 0234 | 034 | 0134 |
| $\longleftarrow$ | 01234 | 0234 | 01234 |

3. Je třeba dokázat dvě inkluze:

**L(G) ⊆ L** :
Dokážeme, že pro libovolnou větnou formu $w$, kde $S \Rightarrow^* w$, platí: $2(\#_A(w) + \#_a(w)) = \#_B(w) + \#_b(w)$. Důkaz provedeme indukcí vzhledem k *délce odvození* větné formy $w$.

- **n=0:** - pak $w = S$ a $2(\#_A(S) + \#_a(S)) = 0 = \#_B(S) + \#_b(S)$.
- **indukční krok:** Předpokládejme, že tvrzení platí pro každou větnou formu, jejíž délka odvození je $n$. Ukážeme, že pak toto tvrzení platí též pro každou větnou formu, která má délku odvození $n+1$. Nechť $w$ je větná forma o délce odvození $n+1$ a nechť $S \Rightarrow v_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow v_n \Rightarrow w$ je její odvození v gramatice $G$. Větná forma $v_n$ má délku odvození $n$, proto dle indukčního předpokladu platí:

$$2(\#_A(v_n) + \#_a(v_n)) = \#_B(v_n) + \#_b(v_n)$$

  Derivace $v_n \Rightarrow w$ vznikla aplikací jednoho z následujících pravidel:
  - $S \to ABBS$ nebo $S \to ABB$.
    Pak:
    $\#_A(w) + \#_a(w) = \#_A(v_n) + \#_a(v_n) + 1$ a
    $\#_B(w) + \#_b(w) = \#_B(v_n) + \#_b(v_n) + 2$ a tedy
    $2(\#_A(w) + \#_a(w)) = \#_B(w) + \#_b(w)$
  - $AB \to BA,\ BA \to AB,\ A \to a$ nebo $B \to b$.
    Pak:
    $\#_A(w) + \#_a(w) = \#_A(v_n) + \#_a(v_n)$ a
    $\#_B(w) + \#_b(w) = \#_B(v_n) + \#_b(v_n)$, tedy
    $2(\#_A(w) + \#_a(w)) = \#_B(w) + \#_b(w)$

Každé slovo $u$ jazyka $L(G)$ je větná forma, která neobsahuje neterminály. Proto $2.\#_a(u) = \#_b(u)$.

**L ⊆ L(G)** :
Nechť $u \in L$. Ukážeme, že slovo $u$ lze odvodit v gramatice $G$. Nechť $n = \#_a(u)$. Pro odvození slova $u$ v gramatice $G$ nejprve aplikujeme $(n-1)$ krát pravidlo $S \to ABBS$ a pak jedenkrát pravidlo $S \to ABB$. Obdržíme větnou formu $w = (ABB)^n$, pro niž platí $\#_A(w) = \#_a(u) \wedge \#_B(w) = \#_b(u)$. Nyní pomocí opakované aplikace pravidel $AB \to BA$ a $BA \to AB$ přepíšeme větnou formu $w$ na větnou formu $w'$ tak, aby platilo:

$\forall i \in N,\ 1 \leq i \leq 3n :$ na $i$-tém místě ve slově $u$ je $a \Longleftrightarrow$
na $i$-tém místě ve větné formě $w'$ je $A$

(striktně vzato, měli bychom *dokázat*, že takovou větnou formu $w'$ lze pomocí uvedených

4. **a)** Nechť $A$ je konečný automat s $k$ stavy akceptující jazyk $L$.

$'\Longrightarrow'$ Z nekonečnosti jazyka $L$ plyne existence slova $w \in L$ délky $|w| \geq k$. Když $|w| < 2k$, tvrzení je dokázano. Předpokládejme $|w| \geq 2k$. Na slovo $w$ můžeme aplikovat pumping lemu. Ta zaručuje existenci slov $v, x, y$ takových, že $x \neq \varepsilon$, $|x| \leq k$, $w = vxy$ a $vy \in L$. Délku slova $vy$ můžeme ohraničit takto: $|w| - k \leq |vy| < |w|$. Nyní buď $|vy| < 2k$, anebo pro něj můžeme uvedenou úvahu zopakovat. Protože se vždy slovo zkrátí minimálně o jeden a maximálně o $k$ symbolů, jeho délka po konečném počtě zkracování bude náležet do intervalu $< k, 2k)$ délky $k$.

$'\Longleftarrow'$ Opačná inkluze plyne přímo z pumping lemy: současně se slovem $w$ délky alespoň $k$ musí $L$ obsahovat slova $vx^iy$ pro všechna $i \geq 0$, přičemž $w = vxy$ a $x \neq \varepsilon$.

**b)** Tvrzení obecně neplatí. Jako protipříklad stačí vzít např. automat $A$ akceptující jazyk $\{abc\}^*$; $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_0\})$, kde $\delta(q_0, a) = q_1$, $\delta(q_1, b) = q_2$ a $\delta(q_2, c) = q_0$.