

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

1. [2 body] Nechť \mathcal{G} je gramatika $(\{S, X, Y\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde P obsahuje pravidla:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aS \mid Sa \mid bXb \mid a \\ X &\rightarrow aX \mid Xa \mid cYc \mid c \\ Y &\rightarrow cYc \end{aligned}$$

Popište jazyk generovaný gramatikou \mathcal{G} . Rozhodněte, je-li tento jazyk regulární. Své rozhodnutí dokažte. (*K důkazu regularity jazyka stačí napsat příslušnou gramatiku nebo automat.*)

Řešení: Jazyk L je regulární, přestože uvedená gramatika regulární není. Odpovídá jazyku

$$\{a\}^+ \cup \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^* \cdot \{c\} \cdot \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*$$

a může být generován například regulární gramatikou $(\{A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P', A)$, kde P' obsahuje následující pravidla:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow a \mid aA \mid bB \\ B &\rightarrow aB \mid cC \\ C &\rightarrow aC \mid bD \mid b \\ D &\rightarrow aD \mid a \end{aligned}$$

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

2. [2 body] Rozhodněte, zda je jazyk $L = \{b^i c^j \mid i, j \geq 0, 2i = 3j\}$ regulární. Své rozhodnutí dokažte. (K důkazu regularity jazyka stačí napsat příslušnou gramatiku nebo automat.)

Řešení: Jazyk L není regulární. Důkaz pomocí lemmatu o vkládání.

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné.
- Volíme $w = b^{3n}c^{2n}$ (zřejmě $|w| \geq n$).
- Pro každou trojici slov x, y, z splňující $w = xyz$, $|xy| \leq n$ a $y \neq \varepsilon$ platí $x = b^k$, $y = b^l$, $z = b^{3n-k-l}c^{2n}$, kde $0 \leq k, 0 < l \leq n$.
- Volbou $i = 2$ dostáváme $xy^i z = xy^2 z = b^{3n+l}c^{2n}$. Protože $l > 0$, platí $2 \cdot (3n + l) = 6n + 2l > 6n = 3 \cdot (2n)$. Slovo tedy nemůže do jazyka L patřit.

Z lemma o vkládání tedy plyne, že L regulární není.