IB102 – úkol 4 – řešení **Odevzdání: 26. 10. 2009**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

1. [2 body] Nechť $\Sigma = \{a, b\}$ je abeceda. Rozhodněte, zda jsou relace $\sim_1, \sim_2$ na Σ^* pravé kongruence. Své tvrzení dokažte.

$$u \sim_1 v \iff u = v \text{ nebo } (|u| \cdot |v|) \bmod 2 = 0$$
$$u \sim_2 v \iff (\#_b(u) + \#_b(v)) \bmod 2 = 0$$

Řešení:

Relace $\sim$ na Σ^* je pravou kongruencí, pokud je ekvivalencí a pro každé $u, v, w \in \Sigma^*$ platí $u \sim v \Longrightarrow uw \sim vw$.

a) Relace $\sim_1$ není pravou kongruencí, protože není tranzitivní, a tedy není ekvivalencí. Například $a \sim_1 ab$ a $ab \sim_1 aab$, ale $a \not\sim_1 aab$.

b) Relace $\sim_2$ je

- reflexivní: Dvojnásobek počtu znaků b v libovolném slově je sudé číslo.
- symetrická: Plyne z komutativity sčítání přirozených čísel. Pokud $\#_b(u) + \#_b(v)$ je sudé, pak i $\#_b(v) + \#_b(u)$ je sudé.
- tranzitivní: $\#_b(u) + \#_b(v)$ je sudé číslo, pokud u i v obsahují obě lichý, nebo obě sudý počet znaků b. Proto z $u \sim_2 v$ a $v \sim_2 w$ plyne, že $\#_b(u), \#_b(v), \#_b(w)$ jsou buď všechny sudé nebo všechny liché a tudíž $u \sim_2 w$.
- pravá kongruence: $\sim_2$ je ekvivalence. Nechť $u \sim_2 v$, tedy $\#_b(u) + \#_b(v)$ je sudé číslo. Pak pro libovolné slovo w platí, že součet $\#_b(uw) + \#_b(vw) = \#_b(u) + \#_b(v) + 2\#_b(w)$ je sudý, a proto $uw \sim_2 vw$.

IB102 – úkol 4 – řešení **Odevzdání: 26. 10. 2009**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

---

2. [**2 body**] Nechť $\Sigma = \{a, b\}$ je abeceda a

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ začíná písmenem } b \text{ a } \#_a(w) \text{ není dělitelný třemi}\}$$

je jazyk nad touto abecedou.

- Popište třídy rozkladu $\Sigma^*/\!\sim_L$ a určete index $\sim_L$.
- Najděte relaci $\sim$ na Σ^* takovou, že $\sim \neq \sim_L$, $\sim$ je pravou kongruencí s konečným indexem a L je sjednocením některých tříd $\Sigma^*/\!\sim$.

Řešení:

- $\Sigma^*/\!\sim_L = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4\}$, kde

  $T_0 = \{\varepsilon\}$
  $T_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ začíná písmenem } b \ \wedge\ \#_a(w) \bmod 3 = 1\}$
  $T_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ začíná písmenem } b \ \wedge\ \#_a(w) \bmod 3 = 2\}$
  $T_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ začíná písmenem } b \ \wedge\ \#_a(w) \bmod 3 = 0\}$
  $T_4 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ začíná písmenem } a\}$

  Index $\sim_L$ je tedy 5.

- Definujme $\sim$ následujícícm způsobem:

$$u \sim v \iff \begin{array}{l} u, v \text{ začínají stejným písmenem (příp. } u = v = \varepsilon) \\ \text{a zároveň } \#_a(u) \bmod 3 = \#_a(v) \bmod 3 \end{array}$$

  Potom je $\Sigma^*/\!\sim = \{T_0, T_1, T_2, T_3, A_1, A_2, A_3\}$, kde

  $T_0 = \{\varepsilon\}$,
  $T_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ začíná písmenem } b \ \wedge\ \#_a(w) \bmod 3 = 1\}$
  $T_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ začíná písmenem } b \ \wedge\ \#_a(w) \bmod 3 = 2\}$
  $T_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ začíná písmenem } b \ \wedge\ \#_a(w) \bmod 3 = 0\}$
  $A_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ začíná písmenem } a \ \wedge\ \#_a(w) \bmod 3 = 1\}$
  $A_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ začíná písmenem } a \ \wedge\ \#_a(w) \bmod 3 = 2\}$
  $A_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ začíná písmenem } a \ \wedge\ \#_a(w) \bmod 3 = 0\}$

  $\sim$ má konečný index 7 a $L = T_1 \cup T_2$.