IB102 – úkol 5 – řešení **Odevzdání: 2. 11. 2009**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

1. [**2 body**] K zadanému konečnému automatu zkonstruujte ekvivalentní minimální konečný automat v kanonickém tvaru. Konstrukci zde uveďte.

	a	b
$\rightarrow 1$	$\emptyset$	{2,3}
2	{1,6}	{7}
3	$\emptyset$	{4,5,7}
$\leftarrow 4$	{6}	{2,8}
5	{1}	$\emptyset$
6	{6}	$\emptyset$
7	$\emptyset$	{8}
$\leftarrow 8$	{1}	{4,5}

Řešení:

det. úplný	a	b
$\rightarrow \{1\}$	$\emptyset$	$\{2,3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{2,3\}$	$\{1,6\}$	$\{4,5,7\}$
$\{1,6\}$	$\{6\}$	$\{2,3\}$
$\leftarrow \{4,5,7\}$	$\{1,6\}$	$\{2,8\}$
$\{6\}$	$\{6\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{2,8\}$	$\{1,6\}$	$\{4,5,7\}$

$\equiv_0$		a	b
I	$\{1\}$	I	I
	$\emptyset$	I	I
	$\{2,3\}$	I	II
	$\{1,6\}$	I	I
	$\{6\}$	I	I
II	$\{4,5,7\}$	I	II
	$\{2,8\}$	I	II

$\equiv_1$		a	b
I	$\{1\}$	I	II
	$\emptyset$	I	I
	$\{1,6\}$	I	II
	$\{6\}$	I	I
II	$\{2,3\}$	I	III
III	$\{4,5,7\}$	I	III
	$\{2,8\}$	I	III

$\equiv_2$	$= \equiv$	a	b
I	$\{1\}$	II	III
	$\{1,6\}$	II	III
II	$\emptyset$	II	II
	$\{6\}$	II	II
III	$\{2,3\}$	I	IV
IV	$\{4,5,7\}$	I	IV
	$\{2,8\}$	I	IV

$\mathcal{M}/\equiv$	a	b
$\rightarrow$ I	II	III
II	II	II
III	I	IV
$\leftarrow$ IV	I	IV

kanonický	a	b
$\rightarrow$A	B	C
B	B	B
C	A	D
$\leftarrow$ D	A	D

IB102 – úkol 5 – řešení **Odevzdání: 2. 11. 2009**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

2. [**2 body**] Nechť $\Sigma = \{a, b, c\}$ je pevná abeceda a nechť L je jazyk nad abecedou Σ. Definujme následující operaci:

$$\mathsf{noaces}(L) = \{w \mid w \in L \land w \text{ neobsahuje podslovo } aa\}$$

Například pro $L = \{aba, aaa, bbaa, bbb\}$ platí $\mathsf{noaces}(L) = \{aba, bbb\}$.

Uveďte obecný postup, kterým lze pro libovolný deterministický konečný automat $\mathcal{M}$ nad abecedou Σ sestrojit deterministický konečný automat $\mathcal{M}'$, pro který platí $L(\mathcal{M}') = \mathsf{noaces}(L(\mathcal{M}))$. Zdůvodněte správnost své konstrukce.

Řešení:

Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Bez újmy na becnosti předpokládáme, že δ je totální (jinak vstupní automat nejprve ztotálníme). Potom $\mathcal{M}' = (Q \cup Q' \cup \{r\}, \Sigma, \delta', q_0, F')$, kde:

- $Q' = \{q' \mid q \in Q\}$ a $r \notin Q \cup Q'$
- $F' = F \cup \{q' \mid q \in F\}$
- Necht' $q \in Q$, $x \in \Sigma$ a $\delta(q, x) = p$, pak δ' definujeme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
\delta'(q, x) &= \begin{cases} p' & \text{pokud } x = a \\ p & \text{pokud } x \neq a \end{cases} \\
\delta'(q', x) &= \begin{cases} r & \text{pokud } x = a \\ p & \text{pokud } x \neq a \end{cases} \\
\delta'(r, x) &= r
\end{aligned}$$

Automat $\mathcal{M}'$ funguje stejně jako $\mathcal{M}$, ale pouze do chvíle než se na vstupu objeví znak a. Objeví-li se na vstupu znak a, po kterém by $\mathcal{M}$ přešel do stavu q, přejde $\mathcal{M}'$ do stavu q', který je „dvojníkem“ stavu q. Pokud v nějakém čárkovaném stavu přečte $\mathcal{M}'$ opět znak a, znamená to, že přečetl dva znaky a po sobě, a tak přejde do speciálního neakceptujícího stavu r, ze kterého se už nemůže nikdy dostat a akceptovat. Pokud v čárkovaném stavu q' přečte $\mathcal{M}'$ znak b nebo c, přejde do nečárkovaného stavu p, kde p je stav, do kterého by ve stejné situaci přešel $\mathcal{M}$ ze stavu q. Pak zase $\mathcal{M}'$ funguje jako $\mathcal{M}$ až do chvíle než se na vstupu objeví další znak a. Z výše uvedených faktů vyplývá následující.

Pro každé $w \in \Sigma^*$: Pokud $\widehat{\delta}(q_0, w) = p$, tak:

$$\widehat{\delta}'(q_0, w) = \begin{cases} p & \text{pokud } w \text{ neobsahuje podslovo } aa \land w \text{ nekončí znakem } a \\ p' & \text{pokud } w \text{ neobsahuje podslovo } aa \land w \text{ končí znakem } a \\ r & \text{pokud } w \text{ obsahuje podslovo } aa \end{cases}$$

Jelikož v $\mathcal{M}'$ jsou akceptující všechny stavy z množiny F i jejich dvojníci, platí $L(\mathcal{M}') = \mathsf{noaces}(L(\mathcal{M}))$.