

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

1. [2 body] Rozhodněte, zda je jazyk

$$L = \{ucu' \mid u, u' \in \{a, b\}^*, \#_a(u) = \#_b(u'), \#_b(u) = \#_a(u')\}$$

bezkontextový. Pokud jste rozhodli, že je bezkontextový, napište pro něj bezkontextovou gramatiku. V opačném případě dokažte, že L není bezkontextový.

Řešení: Jazyk L není bezkontextový, což dokážeme pomocí pumping lemma pro bezkontextové jazyky:

- Necht' $n \in \mathbb{N}$ je libovolné.
- Zvolíme si slovo $z = a^n b^n c b^n a^n \in L$, $|z| > n$.
- Pro každé rozdělení slova $z = uvwxy$ splňující $vx \neq \varepsilon$ a $|vwx| \leq n$ vždy nastane jedna z následujících možností:
 1. vx obsahuje c . Volbou $i = 0$ dostáváme $uv^iwx^i y = uwy \notin L$, protože uwy neobsahuje c .
 2. w obsahuje c . Potom $v = b^j$ a $x = b^k$ pro nějaké $j, k \geq 0$ splňující $j + k > 0$. Volbou $i = 0$ dostáváme $uv^iwx^i y = uwy = a^n b^{n-j} c b^{n-k} a^n \notin L$, protože $j > 0$ nebo $k > 0$.
 3. u obsahuje c . Potom $vx = b^j a^k$, kde $j + k > 0$. Volbou $i = 0$ dostáváme $uv^iwx^i y = uwy = a^n b^n c b^{n-j} a^{n-k} \notin L$, protože $j > 0$ nebo $k > 0$.
 4. y obsahuje c . Potom $vx = a^j b^k$, kde $j + k > 0$. Volbou $i = 0$ dostáváme $uv^iwx^i y = uwy = a^{n-j} b^{n-k} c b^n a^n \notin L$, protože $j > 0$ nebo $k > 0$.
- Pro každé rozdělení (vyhovující podmínkám) jsme tedy našli index $i \in \mathbb{N}_0$ takový, že $uv^iwx^i y \notin L$. Z pumping lemma pro bezkontextové jazyky plyne, že jazyk L není bezkontextový.

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

2. [2 body] Mějme bezkontextovou gramatiku $G = (\{S, A, B, C, D, E, F, G, H\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde

$$P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow aAb \mid BD, \\ A \rightarrow ACE \mid BcB \mid AF \mid bAa \mid H \mid a, \\ B \rightarrow D \mid bb \mid \varepsilon, \\ C \rightarrow BDC \mid CcF \mid cc \mid \varepsilon, \\ D \rightarrow SS \mid aFG \mid C, \\ E \rightarrow FE \mid EF, \\ F \rightarrow Eabc, \\ G \rightarrow GG \mid GE \mid abc, \\ H \rightarrow FF \mid A \}. \end{array}$$

Zkonstruuje vlastní bezkontextovou gramatiku G' takovou, že $L(G') = L(G)$.

Řešení:

Algoritmem 3.4 ze skript odstraníme ε -pravidla: spočteme množinu $N_\varepsilon = \{S, B, C, D\}$ a získáme ekvivalentní gramatiku $G_1 = (\{S', S, A, B, C, D, E, F, G, H\}, \{a, b, c\}, P_1, S')$, kde

$$P_1 = \{ \begin{array}{l} S' \rightarrow \varepsilon \mid S, \\ S \rightarrow aAb \mid BD \mid B \mid D, \\ A \rightarrow ACE \mid BcB \mid AF \mid bAa \mid H \mid a \mid cB \mid Bc \mid c \mid AE, \\ B \rightarrow D \mid bb, \\ C \rightarrow BDC \mid CcF \mid cc \mid BD \mid BC \mid DC \mid B \mid D \mid C \mid cF, \\ D \rightarrow SS \mid aFG \mid C \mid S, \\ E \rightarrow FE \mid EF, \\ F \rightarrow Eabc, \\ G \rightarrow GG \mid GE \mid abc, \\ H \rightarrow FF \mid A \}. \end{array}$$

Poté aplikujeme algoritmus 3.5 a odstraníme jednoduchá pravidla. Získáme gramatiku $G_2 = (\{S', S, A, B, C, D, E, F, G, H\}, \{a, b, c\}, P_2, S')$, kde

$$P_2 = \{ \begin{array}{l} S' \rightarrow \varepsilon \mid aAb \mid BD \mid bb \mid BDC \mid cc \mid CcF \mid BC \mid DC \mid cF \mid SS \mid aFG, \\ S \rightarrow aAb \mid BD \mid bb \mid BDC \mid cc \mid CcF \mid BC \mid DC \mid cF \mid SS \mid aFG, \\ A \rightarrow ACE \mid BcB \mid AF \mid bAa \mid a \mid cB \mid Bc \mid c \mid AE \mid FF, \\ B \rightarrow aAb \mid BD \mid bb \mid BDC \mid cc \mid CcF \mid BC \mid DC \mid cF \mid SS \mid aFG, \\ C \rightarrow aAb \mid BD \mid bb \mid BDC \mid cc \mid CcF \mid BC \mid DC \mid cF \mid SS \mid aFG, \\ D \rightarrow aAb \mid BD \mid bb \mid BDC \mid cc \mid CcF \mid BC \mid DC \mid cF \mid SS \mid aFG, \\ E \rightarrow FE \mid EF, \\ F \rightarrow Eabc, \\ G \rightarrow GG \mid GE \mid abc, \\ H \rightarrow ACE \mid BcB \mid AF \mid bAa \mid a \mid cB \mid Bc \mid c \mid AE \mid FF \}. \end{array}$$

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

Řešení (pokračování):

Nakonec odstraníme nepoužitelné symboly s využitím algoritmů 3.2 a 3.3. Vznikne gramatika $G' = (\{S', S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P', S')$, kde

$$P' = \{ \begin{array}{l} S' \rightarrow \varepsilon \mid aAb \mid BD \mid bb \mid BDC \mid cc \mid DC \mid BC \mid SS, \\ S \rightarrow aAb \mid BD \mid bb \mid BDC \mid cc \mid DC \mid BC \mid SS, \\ A \rightarrow bAa \mid BcB \mid a \mid cB \mid Bc \mid c, \\ B \rightarrow aAb \mid BD \mid bb \mid BDC \mid cc \mid DC \mid BC \mid SS, \\ C \rightarrow aAb \mid BD \mid bb \mid BDC \mid cc \mid DC \mid BC \mid SS, \\ D \rightarrow aAb \mid BD \mid bb \mid BDC \mid cc \mid DC \mid BC \mid SS \}. \end{array}$$

Tato gramatika je hledanou vlastní gramatikou ekvivalentní gramatice G ze zadání.