

Příklad

$\mathcal{M} = (\{q_0, p, f\}, \{a, b\}, \{A, B, Z\}, \delta, q_0, Z, \{f\})$, kde

$$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AZ)\}$$

$$\delta(q_0, b, Z) = \{(q_0, BZ)\}$$

$$\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}$$

$$\delta(q_0, b, A) = \{(q_0, BA)\}$$

$$\delta(q_0, a, B) = \{(q_0, AB)\}$$

$$\delta(q_0, b, B) = \{(q_0, BB)\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z) = \{(p, Z)\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, A) = \{(p, A)\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, B) = \{(p, B)\}$$

$$\delta(p, a, A) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, b, B) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, \varepsilon, Z) = \{(f, Z)\}$$

Příklad

$\mathcal{M} = (\{q_0\}, \{a, b\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \emptyset)$, kde

$$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, A)\}$$

$$\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}$$

$$\delta(q_0, b, A) = \{(q_0, \varepsilon)\}$$

Ekvivalence dvou způsobů akceptování

Věta 3.39. Pro každý jazyk L platí:

$L = L(\mathcal{N})$ pro nějaký PDA $\mathcal{N} \iff L = L_e(\mathcal{M})$ pro nějaký PDA \mathcal{M} .

Důkaz. **koncový stav \implies prázdný zásobník**

Intuice:

K danému \mathcal{N} zkonstruujeme \mathcal{M} simulující jeho činnost.

Vejde-li \mathcal{N} do koncového stavu, \mathcal{M} se nedeterministicky rozhodne

- pokračovat v simulaci automatu \mathcal{N} **nebo**
- přejít do nově přidaného stavu q_ϵ , v němž vyprázdní zásobník.

Komplikace:

Řešení: před zahájením simulace bude u \mathcal{M} na dně zásobníku nový symbol, který nedovolíme odstranit jinde, než ve stavu q_ϵ .

Konstrukce: Nechť $\mathcal{N} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$.

Klademe $\mathcal{M} = (Q \cup \{q'_0, q_\varepsilon\}, \Sigma, \Gamma \cup \{Z'\}, \delta', q'_0, Z', \emptyset)$,
kde $Z' \notin \Gamma$, $q'_0, q_\varepsilon \notin Q$ a δ' je definována takto:

- $\delta'(q'_0, \varepsilon, Z') = \{(q_0, Z_0 Z')\}$
- jestliže $\delta(q, a, Z)$ obsahuje (r, γ) , pak $\delta'(q, a, Z)$ obsahuje (r, γ)
- $\delta'(q, \varepsilon, Z)$ obsahuje (q_ε, Z)
pro všechny $q \in F$ a $Z \in \Gamma \cup \{Z'\}$
- $\delta'(q_\varepsilon, \varepsilon, Z) = \{(q_\varepsilon, \varepsilon)\}$
pro všechny $Z \in \Gamma \cup \{Z'\}$

Korektnost:

prázdný zásobník \implies koncový stav

Intuice:

K danému \mathcal{M} zkonstruujeme \mathcal{N} simulující jeho činnost.

- \mathcal{N} si před simulací přidá na dno zásobníku nový symbol.
- Je-li \mathcal{N} schopen číst tento symbol (tj. zásobník automatu \mathcal{M} je prázdný) tak \mathcal{N} přejde do nově přidaného stavu q_f , který je koncovým stavem.

Konstrukce: Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$.

Klademe $\mathcal{N} = (Q \cup \{q'_0, q_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{Z'\}, \delta', q'_0, Z', \{q_f\})$,
kde $Z' \notin \Gamma$, $q'_0, q_f \notin Q$ a δ' je definována takto:

- $\delta'(q'_0, \varepsilon, Z') = \{(q_0, Z_0Z')\}$
- jestliže $\delta(q, a, Z)$ obsahuje (r, γ) , pak $\delta'(q, a, Z)$ obsahuje (r, γ)
- $\delta'(q, \varepsilon, Z') = \{(q_f, \varepsilon)\}$
pro všechny $q \in Q$

□

Grafická reprezentace konfigurací

Rozšířený zásobníkový automat

Definice 3.44. Rozšířený zásobníkový automat je sedmice $\mathcal{R} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

- všechny symboly až na δ mají tentýž význam jako v definici PDA,
- δ je zobrazením
z **konečné podmnožiny** množiny $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^*$
do **konečných podmnožin** množiny $Q \times \Gamma^*$.

Pojmy konfigurace a akceptovaný jazyk (koncovým stavem, prázdným zásobníkem) zůstávají beze změny. **Krok výpočtu** $\frac{}{\mathcal{R}}$ definujeme takto:

$$(p, aw, \gamma_1\alpha) \frac{}{\mathcal{R}} (q, w, \gamma_2\alpha) \stackrel{def}{\iff} \exists (q, \gamma_2) \in \delta(p, a, \gamma_1) \text{ pro } a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$$

Příklad

$\mathcal{R} = (\{q_0, p, f\}, \{a, b, c, d\}, \{A, B, Z\}, \delta, q_0, Z, \{f\})$, kde

$$\delta(q_0, a, \varepsilon) = \{(q_0, A)\}$$

$$\delta(q_0, b, \varepsilon) = \{(q_0, B)\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, a, A) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, b, B) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, c, AA) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, c, BBB) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, d, Z) = \{(f, \varepsilon)\}$$

Ekvivalence rozšířených PDA a PDA

Lemma 3.45. Ke každému rozšířenému PDA existuje ekvivalentní (*obyčejný*) PDA.

Intuice:

Důkaz. Nechť $\mathcal{R} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je rozšířený PDA a $m = \max\{|\alpha| \mid \delta(q, a, \alpha) \text{ je definováno pro nějaké } q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\}$.

Definujeme $\mathcal{P} = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_1, Z_1, F_1)$, kde

- $Q_1 = \{[q, \alpha] \mid q \in Q, \alpha \in \Gamma_1^*, 0 \leq |\alpha| \leq m\}$,
- $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{Z_1\}$, kde Z_1 je nový symbol,
- $q_1 = [q_0, Z_0 Z_1^{m-1}]$,
- $F_1 = \{[q, \alpha] \mid q \in F, \alpha \in \Gamma_1^*, 0 \leq |\alpha| \leq m\}$.

- δ_1 je definována takto:
 - jestliže $\delta(q, a, X_1 \dots X_k)$ obsahuje $(r, Y_1 \dots Y_l)$, pak
 - $l \geq k$
 - $\delta_1([q, X_1 \dots X_k \alpha], a, Z)$ obsahuje $([r, \beta], \gamma Z)$,
 - kde $\beta\gamma = Y_1 \dots Y_l \alpha$ a $|\beta| = m$,
 - pro všechny $Z \in \Gamma_1$ a $\alpha \in \Gamma_1^*$ takové, že $|\alpha| = m - k$
 - $l < k$
 - $\delta_1([q, X_1 \dots X_k \alpha], a, Z)$ obsahuje $([r, Y_1 \dots Y_l \alpha Z], \varepsilon)$
 - pro všechny $Z \in \Gamma_1$ a $\alpha \in \Gamma_1^*$ takové, že $|\alpha| = m - k$
 - $\delta_1([q, \alpha], \varepsilon, Z) = \{([q, \alpha Z], \varepsilon)\}$
 - pro všechny $q \in Q$, $Z \in \Gamma_1$ a $\alpha \in \Gamma_1^*$ takové, že $|\alpha| < m$

Korektnost: Ověříme, že platí

$$(q, aw, X_1 \dots X_k X_{k+1} \dots X_n) \mid_{\mathcal{R}} (r, w, Y_1 \dots Y_l X_{k+1} \dots X_n) \\ \iff ([q, \alpha], aw, \beta) \mid_{\mathcal{P}}^+ ([r, \alpha'], w, \beta'),$$

kde:

1. $\alpha\beta = X_1 \dots X_n Z_1^m$,
2. $\alpha'\beta' = Y_1 \dots Y_l X_{k+1} \dots X_n Z_1^m$,
3. $|\alpha| = |\alpha'| = m$ a
4. mezi dvěma výše uvedenými konfiguracemi PDA \mathcal{P} neexistuje taková konfigurace, kde druhá komponenta stavu (tj. cache) by měla délku m .

□