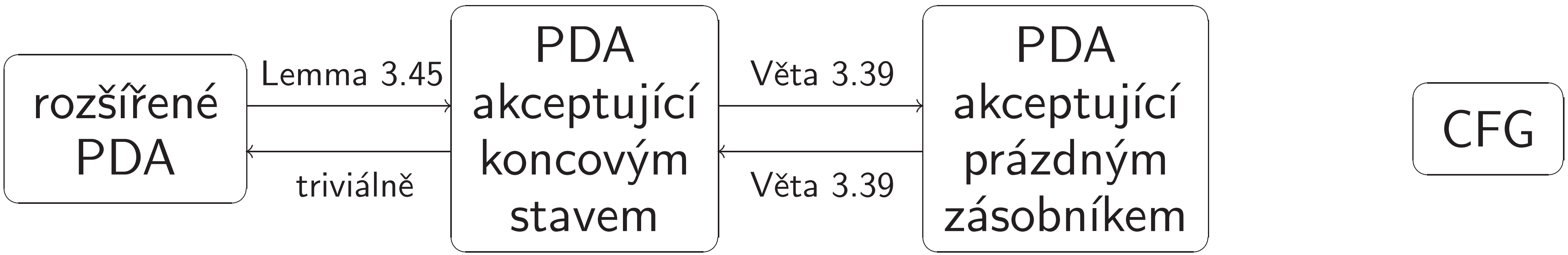
Zásobníkové automaty a bezkontextové jazyky



Zásobníkové automaty a bezkontextové jazyky

Motivace 1: Jaká je třída jazyků rozpoznávaných zásobníkovými automaty?

Motivace 2: Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$ a slovo w.
Jak zjistit, zda slovo w sa dá vygenerovat v gramatice $\mathcal{G}$?

Problém syntaktické analýzy pro bezkontextové gramatiky:
pro danou bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$ a slovo w rozhodnout, zda $w \in L(\mathcal{G})$.

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zásobníkových automatů

Věta 3.51. Ke každému PDA $\mathcal{M}$ lze sestrojit CFG $\mathcal{G}$ takovou, že $L_e(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

Důkaz. Vynechán. $\square$

Věta 3.47. Ke každé CFG $\mathcal{G}$ lze sestrojit PDA $\mathcal{M}$ takový, že $L(\mathcal{G}) = L_e(\mathcal{M})$.

Důkaz. Uvedeme za chvíli. $\square$

Důsledek 3.52. Třída jazyků rozpoznávaných zásobníkovými automaty je právě třída bezkontextových jazyků.

Intuice převodu PDA na CFG

1. $|Q| = 1$

Intuice převodu PDA na CFG

2. $|Q| \geq 2$

Intuice převodu CFG na PDA

Konstrukce PDA řeší problém syntaktické analýzy.
(platí pro dané $\mathcal{G}$ a w: $w \in L(\mathcal{G})$?)

$w \in L(\mathcal{G}) \iff$ v $\mathcal{G}$ existuje derivační strom s výsledkem w

Intuice převodu CFG na PDA aneb O nedeterministické syntaktické analýze

PDA se bude snažit budovat derivační strom pro w.

shora dolů	zdola nahoru

Intuice pro analýzu shora dolů

Budování derivačního stromu simuluje levé derivace, tj. vždy rozvíjíme nejlevější neterminál.

Nedeterministická syntaktická analýza shora dolů

Věta 3.47. Ke každé CFG $\mathcal{G}$ lze sestrojit PDA $\mathcal{M}$ takový, že $L(\mathcal{G}) = L_e(\mathcal{M})$.

Důkaz. K dané gramatice $\mathcal{G}$ konstruujeme PDA $\mathcal{M}$, který simuluje levé derivace v $\mathcal{G}$.

- V levé derivaci je v jednom kroku odvození nahrazen (nejlevější) neterminál A pravou stranou $X_1 \dots X_n$ nějakého A-pravidla.
- V $\mathcal{M}$ této situaci odpovídá náhrada A na vrcholu zásobníku řetězem $X_1 \dots X_n$.

$\mathcal{M} = (\{q\}, \Sigma, N \cup \Sigma, \delta, q, S, \emptyset)$, kde δ je definována:

- $\delta(q, \varepsilon, A)$ obsahuje (q, α) právě když $A \to \alpha \in P$
- $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$ pro všechna $a \in \Sigma$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow aAB \\
A &\rightarrow Aa \mid \varepsilon \\
B &\rightarrow SaA \mid b
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\delta(q,\varepsilon,S) &= \{(q,aAB)\} \\
\delta(q,\varepsilon,A) &= \{(q,Aa),(q,\varepsilon)\} \\
\delta(q,\varepsilon,B) &= \{(q,SaA),(q,b)\} \\
\delta(q,a,a) &= \delta(q,b,b) \;=\; \{(q,\varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow aAB \\
&\Rightarrow aB \\
&\Rightarrow aSaA \\
&\Rightarrow aaABaA \\
&\Rightarrow aaBaA \\
&\Rightarrow aabaA \\
&\Rightarrow aaba
\end{aligned}
$$

Korektnost

$$A \Rightarrow^* w \iff (q, w, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

($\Longrightarrow$) Indukcí vzhledem k délce odvození m.

1. $m = 1$: zřejmé.
2. $m > 1$: nechť tvrzení platí pro všechna $m' < m$.

   $A \Rightarrow X_1 X_2 \ldots X_k \Rightarrow^* x_1 x_2 \ldots x_k = w$, kde $X_i \overset{m_i}{\Rightarrow} x_i$, $0 \leq m_i < m$
   z definice δ plyne $(q, w, A) \vdash (q, w, X_1 X_2 \ldots X_k)$.

   Je-li $X_i \in N$, pak dle indukčního předpokladu máme
   $(q, x_i, X_i) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

   Je-li $X_i \in \Sigma$, pak $X_i = x_i$ a z definice δ plyne $(q, x_i, x_i) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

   Kompozicí dostáváme $(q, w, A) \vdash^+ (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

($\Longleftarrow$) Předpokládejme $(q, w, A) \vdash^{n} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ a ukažme $A \Rightarrow^{+} w$.
Indukcí vzhledem k délce výpočtu n.

1. $n = 1$: zřejmé.
2. $n > 1$: nechť tvrzení platí pro všechna $n' < n$.

   $(q, w, A) \vdash (q, w, X_1 X_2 \ldots X_k)$, tj. $A \to X_1 X_2 \ldots X_k \in P$

   w můžeme napsat jako $w = x_1 x_2 \ldots x_k$ takové, že

   - je-li $X_i \in N$, pak $(q, x_i, X_i) \vdash^{n_i} (q, \varepsilon, \varepsilon)$, kde $n_i < n$.
     Dle IP $X_i \Rightarrow^{+} x_i$.
   - je-li $X_i \in \Sigma$, pak $X_i \stackrel{0}{\Rightarrow} x_i$.

   Vhodnou kompozicí obdržíme
   $A \Rightarrow X_1 X_2 \ldots X_k \Rightarrow^{*} x_1 X_2 \ldots X_k \Rightarrow^{*} x_1 \ldots x_k = w$
   což je levá derivace slova w v gramatice $\mathcal{G}$. $\square$

Intuice pro analýzu zdola nahoru

Intuice pro analýzu zdola nahoru

Nedeterministická syntaktická analýza zdola nahoru

Věta 3.55. Nechť $\mathcal{G}$ je libovolná CFG, pak lze zkonstruovat rozšířený PDA $\mathcal{R}$ takový, že $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{R})$.

Důkaz. Vrchol zásobníku píšeme vpravo.
Konstruujeme rozšířený PDA $\mathcal{R}$, který simuluje pravou derivaci v $\mathcal{G}$ v obráceném pořadí.

PDA $\mathcal{R}$ má kroky dvojího typu:

1. může kdykoli číst do zásobníku vstupní symbol,
2. **(redukce)** je-li na vrcholu zásobníku řetěz tvořící pravou stranu nějakého pravidla v $\mathcal{G}$, může ho nahradit odpovídajícím levostranným neterminálem (a ze vstupu nic nečte).

Nechť $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$.
Položme $\mathcal{R} = (\{q, r\}, \Sigma, N \cup \Sigma \cup \{\perp\}, \delta, q, \perp, \{r\})$, kde $\perp$ je nově přidaný symbol a kde δ je definována takto:

1. $\delta(q, a, \varepsilon) = \{(q, a)\}$ pro všechna $a \in \Sigma$,

2. je-li $A \to \alpha$, pak $\delta(q, \varepsilon, \alpha)$ obsahuje (q, A),

3. $\delta(q, \varepsilon, \perp S) = \{(r, \varepsilon)\}$.

krok výpočtu		odpovídající pravidlo z $\mathcal{G}$
$(q,\ i+i*i,\ \bot)$	$\vdash^{i} (q,\ +i*i,\ \bot i)$	$F \to i$
	$\vdash^{\varepsilon} (q,\ +i*i,\ \bot F)$	$T \to F$
	$\vdash^{\varepsilon} (q,\ +i*i,\ \bot T)$	$E \to T$
	$\vdash^{\varepsilon} (q,\ +i*i,\ \bot E)$	
	$\vdash^{+} (q,\ i*i,\ \bot E+)$	
	$\vdash^{i} (q,\ *i,\ \bot E+i)$	$F \to i$
	$\vdash^{\varepsilon} (q,\ *i,\ \bot E+F)$	$T \to F$
	$\vdash^{\varepsilon} (q,\ *i,\ \bot E+T)$	
	$\vdash^{*} (q,\ i,\ \bot E+T*)$	
	$\vdash^{i} (q,\ \varepsilon,\ \bot E+T*i)$	$F \to i$
	$\vdash^{\varepsilon} (q,\ \varepsilon,\ \bot E+T*F)$	$T \to T*F$
	$\vdash^{\varepsilon} (q,\ \varepsilon,\ \bot E+T)$	$E \to E+T$
	$\vdash^{\varepsilon} (q,\ \varepsilon,\ \bot E)$	
	$\vdash^{\varepsilon} (r,\ \varepsilon,\ \varepsilon)$	

Korektnost

$$S \Rightarrow^* \alpha A y \overset{n}{\Rightarrow} xy \iff (q, xy, \perp) \vdash^* (q, y, \perp\alpha A),$$

kde $S \Rightarrow^* \alpha A y \overset{n}{\Rightarrow} xy$ je pravá derivace a A je nejpravější neterminál.

($\Longrightarrow$) indukcí k délce odvození
($\Longleftarrow$) indukcí k délce výpočtu

Pro $A = S$ a $\alpha, y = \varepsilon$ dostáváme:
$S \Rightarrow^* x \iff (q, x, \perp) \vdash^* (q, \varepsilon, \perp S) \ \Big[\vdash (r, \varepsilon) \Big]$

"Výstupem" je pravá derivace v obráceném pořadí. $\square$

Efektivnost syntaktické analýzy

Nederministický PDA $\Longrightarrow$ nedeterministický algoritmus
$\Longrightarrow$ exponenciální deterministický algoritmus

Řešení:

- deterministický algoritmus složitosti $\mathcal{O}(n^3)$, kde $n = |w|$
  (algoritmus Cocke - Younger - Kasami)
- deterministické zásobníkové automaty
  a deterministické bezkontextové jazyky
- lineární algoritmy pro speciální třídy deterministických
  bezkontextových jazyků

Vlastnosti bezkontextových jazyků

Věta 3.58. (a 3.61.) Třída bezkontextových jazyků ($\mathcal{L}_2$) **je** uzavřena vzhledem k operacím

1. sjednocení
2. zřetězení
3. iterace
4. pozitivní iterace
5. průnik s regulárním jazykem

Věta 3.60. Třída bezkontextových jazyků ($\mathcal{L}_2$) **není** uzavřena vzhledem k operacím

1. průnik
2. doplněk

Sjednocení

L_1 je generován CFG $\mathcal{G}_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$ a
L_2 je generován CFG $\mathcal{G}_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Definujeme $\mathcal{G} = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, P, S)$,
kde S je nový symbol a

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}$$

Každá derivace v $\mathcal{G}$ začne použitím buď $S \to S_1$ nebo $S \to S_2$.
Podmínka $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ zaručí, že při použití $S \to S_1$ (resp. $S \to S_2$)
lze v dalším derivování používat jen pravidla z P_1 (resp. P_2).

Jazyk $L = L_1 \cup L_2$ je generován gramatikou $\mathcal{G}$.

Zřetězení

L_1 je generován CFG $\mathcal{G}_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$ a
L_2 je generován CFG $\mathcal{G}_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Definujeme $\mathcal{G} = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, P, S)$,
kde S je je nový symbol a

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}$$

Jazyk $L = L_1.L_2$ je generován gramatikou $\mathcal{G}$.

Iterace a pozitivní iterace

L_1 je generován CFG $\mathcal{G}_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$

Definujeme $\mathcal{G} = (N_1 \cup \{S\}, \Sigma_1, P, S)$, kde S je je nový symbol a

$$P = P_1 \cup \{S \to SS_1 \ \mid \ \varepsilon\}$$

Jazyk $L = L_1^*$ je generován gramatikou $\mathcal{G}$.

Definujeme $\mathcal{G} = (N_1 \cup \{S\}, \Sigma_1, P, S)$, kde S je je nový symbol a

$$P = P_1 \cup \{S \to SS_1 \ \mid \ S_1\}$$

Jazyk $L = L_1^+$ je generován gramatikou $\mathcal{G}$.

Korektnost konstrukce pro iteraci

Dokážeme $L(\mathcal{G}) = L_1^*$.

Průnik a doplněk

$L_1 = \{a^n b^n c^m \mid m, n \geq 1\} \qquad L_2 = \{a^m b^n c^m \mid m, n \geq 1\}$

Oba tyto jazyky jsou CFL.

Kbyby $\mathcal{L}_2$ byla uzavřena vzhledem k operaci průniku, pak i $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ musel být bezkontextový, což však není.

Neuzavřenost $\mathcal{L}_2$ vůči doplňku plyne z její uzavřenosti na sjednocení, neuzavřenosti na průnik a z De Morganových pravidel:

$$L_1 \cap L_2 = \text{co–}(\text{co–}L_1 \cup \text{co–}L_2),$$

tj., kdyby $\mathcal{L}_2$ byla uzavřena na doplněk, musela by být uzavřena i na průnik, což však není.

Průnik s regulárním jazykem

$L = L(\mathcal{P})$, kde $\mathcal{P}$ je PDA $\mathcal{P} = (Q_1, \Sigma, \Gamma, \delta_1, q_1, Z_0, F_1)$
$R = L(\mathcal{A})$, kde $\mathcal{A}$ je deterministický FA $\mathcal{A} = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$

Sestrojíme PDA $\mathcal{P}'$ takový, že $L(\mathcal{P}'){=}L \cap R$.

$\mathcal{P}' = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

- $Q = Q_1 \times Q_2$,
- $q_0 = \langle q_1, q_2 \rangle$
- $F = F_1 \times F_2$
- δ : pro každé $p \in Q_1$, $q \in Q_2$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $Z \in \Gamma$ platí:

$$\delta(\langle p, q \rangle, a, Z) = \{(\langle p', q' \rangle, \gamma) \mid (p', \gamma) \in \delta_1(p, a, Z) \text{ a } \widehat{\delta_2}(q, a) = q'\}$$

Zřejmě platí $w \in L(\mathcal{P}') \iff w \in L(\mathcal{P}) \cap L(\mathcal{R})$.