Konstrukce minimálního konečného automatu

Definice 2.18. Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je konečný automat. Stav $q \in Q$ nazveme **dosažitelný**, pokud existuje $w \in \Sigma^*$ takové, že $\hat{\delta}(q_0, w) = q$. Stav je **nedosažitelný**, pokud není dosažitelný.

Příklad

Algoritmus pro eliminaci nedosažitelných stavů FA

Vstup: Konečný automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Výstup: Ekvivalentní automat $\mathcal{M}'$ bez nedosažitelných stavů.

$i := 0$
$S_i := \{q_0\}$
repeat $S_{i+1} := S_i \cup \{q \mid \exists p \in S_i, a \in \Sigma : \delta(p, a) = q\}$
$\qquad i := i + 1$
until $S_i = S_{i-1}$
$Q' := S_i$
$\mathcal{M}' := (Q', \Sigma, \delta|_{Q'}, q_0, F \cap Q')$

Korektnost: algoritmus je správný a konečný.

Příklad

Eliminace ekvivalentních stavů

Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je FA bez nedosažitelných stavů, jehož přechodová funkce je totální.

Definice 2.32. Stavy p, q nazveme **jazykově ekvivalentní**, psáno $p \equiv q$, pokud

$$p \equiv q \iff \forall w \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F).$$

$$p \equiv q \iff \forall w \in \Sigma^* : \; (\hat{\delta}(p,w) \in F \iff \hat{\delta}(q,w) \in F)$$

Definice 2.34. **Reduktem** automatu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme konečný automat $\mathcal{M}/_{\equiv} = (Q/_{\equiv}, \Sigma, \eta, [q_0], F/_{\equiv})$, kde:

- Stavy jsou třídy rozkladu $Q/_{\equiv}$ (třída obsahující stav q je $[q]$).
- Přechodová funkce η je funkce splňující:

$$\forall p, q \in Q, \forall a \in \Sigma : \; \delta(q,a) = p \implies \eta([q], a) = [p].$$

- Počáteční stav je třída rozkladu $Q/_{\equiv}$ obsahující stav q_0.
- Koncové stavy jsou právě ty třídy rozkladu $Q/_{\equiv}$, které obsahují alespoň jeden koncový stav.

Věta 2.37. Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je FA bez nedosažitelných stavů s totální přechodovou funkcí. Pak $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}/_{\equiv})$.

Algoritmus konstrukce minimálního automatu

Definice 2.38. Pro každé $i \in \mathbb{N}_0$ definujeme binární relaci $\equiv_i$ na Q předpisem

$$p \equiv_i q \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \forall w \in \Sigma^*. |w| \leq i : (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F)$$

- $p \equiv_i q$ právě když p a q nelze "rozlišit" žádným slovem délky $\leq i$
- $p \equiv q$ právě když $p \equiv_i q$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$. ($\equiv = \bigcap_{i=0}^{\infty} \equiv_i$)
- 1. $\equiv_0 = \{(p, q) \mid p \in F \Longleftrightarrow q \in F\}$

  2. $\equiv_{i+1} = \{(p, q) \mid p \equiv_i q \ \wedge \ \forall a \in \Sigma : \delta(p, a) \equiv_i \delta(q, a)\}$

Algoritmus konstrukce minimálního automatu

Vstup: Konečný automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ bez nedosažitelných stavů s totální přechodovou funkcí.

Výstup: Redukt $\mathcal{M}/_{\equiv}$.

$i := 0$

$\equiv_0 := \{(p, q) \mid p \in F \iff q \in F\}$

repeat

$\qquad \equiv_{i+1} := \{(p, q) \mid p \equiv_i q \ \wedge \ \forall a \in \Sigma : \delta(p, a) \equiv_i \delta(q, a)\}$

$\qquad i := i + 1$

until $\equiv_i = \equiv_{i-1}$

$\equiv := \equiv_i$

$\mathcal{M}/_{\equiv} := (Q/_{\equiv}, \Sigma, \eta, [q_0], F/_{\equiv})$

Korektnost algoritmu: důkaz vynechán.

Intuice

Příklad

	$\mathcal{M}$	a	b
$\rightarrow$	1	2	–
	2	3	4
$\leftarrow$	3	6	5
	4	3	2
$\leftarrow$	5	6	3
$\leftarrow$	6	2	–
	7	6	1

	$\mathcal{M}'$	a	b
$\rightarrow$	1	2	N
	2	3	4
$\leftarrow$	3	6	5
	4	3	2
$\leftarrow$	5	6	3
$\leftarrow$	6	2	N
	N	N	N

	$\equiv_0$	a	b
I	1	I	I
	2	II	I
	4	II	I
	N	I	I
II	3	II	II
	5	II	II
	6	I	I

Příklad

	$\equiv_1$	a	b
I	1	II	I
	N	I	I
II	2	III	II
	4	III	II
III	3	IV	III
	5	IV	III
IV	6	II	I

	$\equiv_2$	a	b
I	1	III	II
II	N	II	II
III	2	IV	III
	4	IV	III
IV	3	V	IV
	5	V	IV
V	6	III	II

	$\mathcal{M}/_\equiv$	a	b
$\rightarrow$	I	III	II
	II	II	II
	III	IV	III
$\leftarrow$	IV	V	IV
$\leftarrow$	V	III	II

Kanonický tvar konečných automatů
Motivace

	$\mathcal{M}_1$	a	c	b
	I	IV	III	I
$\rightarrow$	II	V	III	III
$\leftarrow$	III	II	I	I
$\leftarrow$	IV	V	I	II
	V	II	V	V

	$\mathcal{M}_2$	a	b	c
$\rightarrow$	I	III	V	V
	II	IV	II	V
	III	I	III	III
$\leftarrow$	IV	III	I	II
$\leftarrow$	V	I	II	II

Kanonický tvar konečných automatů

		a	c	b
	I	IV	III	I
$\rightarrow$	II	V	III	III
$\leftarrow$	III	II	I	I
$\leftarrow$	IV	V	I	II
	V	II	V	V

		a	b	c
$\rightarrow$	A			
	B			
	C			
	D			
	E			

Rozšíření konečných automatů I
Nedeterministické konečné automaty

Definice 2.42. **Nedeterministický konečný automat (NFA)** je $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde význam všech složek je stejný jako v definici FA s výjimkou přechodové funkce δ. Ta je definována jako (totální) zobrazení $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$.

Rozšířená přechodová funkce $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$:

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$
- $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(p, a)$

Jazyk přijímaný nedeterministickým konečným automatem $\mathcal{M}$ je

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Příklad

Ekvivalence DFA a NFA

Věta 2.43. Pro každý NFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ existuje ekvivalentní deterministický FA (DFA).

Důkaz. Definujeme deterministický FA $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$

- $Q' = 2^Q$, tj. stavy automatu $\mathcal{M}'$ jsou všechny podmnožiny Q.
- $\delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, a)$.
- Množina koncových stavů F' je tvořena právě těmi podmnožinami Q, které obsahují nějaký prvek množiny F.

Korektnost

- $\mathcal{M}'$ je deterministický konečný automat.

- $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}'$ jsou ekvivalentní:
  indukcí k délce $w \in \Sigma^*$ dokážeme: $\hat{\delta}(q_0, w) = \widehat{\delta'}(\{q_0\}, w)$

  Základní krok $|w| = 0$: Platí $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\} = \widehat{\delta'}(\{q_0\}, \varepsilon)$.

  Indukční krok: Nechť $w = va$, pak

  $\hat{\delta}(q_0, va) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, v)} \delta(p, a) = \delta'(\hat{\delta}(q_0, v), a)$ (viz definice δ')

  $= \delta'(\widehat{\delta'}(\{q_0\}, v), a)$ (indukční předpoklad) $= \widehat{\delta'}(\{q_0\}, va)$.

  Pak $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$, neboť
  $w \in L(\mathcal{M}) \iff \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \iff$
  $\widehat{\delta'}(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset \iff \widehat{\delta'}(\{q_0\}, w) \in F' \iff w \in L(\mathcal{M}')$. $\square$

Algoritmus transformace NFA na ekvivalent. DFA

Vstup: Nedeterministický FA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Výstup: Ekvivalentní deterministický FA $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ bez nedosažitelných stavů a s totální přechodovou funkcí.

$Q' := \{\{q_0\}\}; \quad \delta' := \emptyset; \quad F' := \emptyset; \quad Done := \emptyset;$
while $(Q' \smallsetminus Done) \neq \emptyset$ **do**
  $M :=$ libovolný prvek množiny $Q' \smallsetminus Done$
  if $M \cap F \neq \emptyset$ **then** $F' := F' \cup \{M\}$ **fi**
  foreach $a \in \Sigma$ **do**
    $N := \bigcup_{p \in M} \delta(p, a)$
    $Q' := Q' \cup \{N\}$
    $\delta' := \delta' \cup \{((M, a), N)\}$ **od**
  $Done := Done \cup \{M\}$
od
$\mathcal{M}' := (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$

Důsledky determinizace konečných automatů

Věta 2.44. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje NFA o n stavech takový, že ekvivalentní DFA má i po minimalizaci 2^n stavů.

Důkaz: vynechán.