Hamiltonovská kružnice

Cvičení k předmětu MA007 Matematická logika, podzim 2009

Tomáš Brázdil a Jan Krčál

Definice 1. Orientovaný graf *je dvojice* $G = (V, E)$*, kde* V *je soubor* vrcholů *a* $E \subseteq V^2$ *je soubor orientovaných* hran *mezi vrcholy.*

Definice 2. *Nechť* $G = (V, E)$ *je orientovaný graf a* $n = |V|$. Hamiltonovská kružnice *(HK) v orientovaném grafu* G *je posloupnost vrcholů* $v_0, v_1, \ldots, v_n$ *taková, že*

1. *pro všechna* $0 \leq i < n$ *platí* $(v_i, v_{i+1}) \in E$
2. *pro všechna* $0 \leq i < j < n$ *platí* $v_i \neq v_j$
3. $v_0 = v_n$

Cvičení. *Nechť* G *je orientovaný graf takový, že* $n = |V| \geq 2$*. Zadejte formuli* φ *takovou, že platí*

$$\varphi \text{ je splnitelná} \Longleftrightarrow G \text{ obsahuje Hamiltonovskou kružnici} \tag{1}$$

a φ *lze sestrojit v polynomiálním čase.*

Poznámka. *Naším úkolem je tedy redukovat problém Hamiltonovské kružnice na NP-úplný problém splnitelnosti výrokových formulí (SAT) v polynomiálním čase.*

Protože $n \geq 2$, graf G obsahuje HK právě tehdy, když graf $(V, E \setminus \{(u,u) \mid u \in V\})$ (tedy G bez smyček) obsahuje HK.

Budeme předpokládat, že pro každé $u \in V$ *platí* $(u, u) \notin E$

(jinými slovy, že G neobsahuje smyčky). Dále budeme předpokládat, že pro každé $u \in V$ existuje alespoň jedno $v \in V$ takové, že $(u, v) \in E$.

Klíčem k řešení je následující alternativní charakterizace HK v grafu G.

Definice 3. *Řekneme, že soubor hran* $K \subseteq E$ *je* HK *pokud splňuje následující podmínky:*

A. *pro každé* $u \in V$ *existuje právě jedno* $v \in V$ *takové, že* $(u, v) \in K$ *(tedy každý vrchol* $u \in V$ *má právě jednu výstupní hranu v* K*).*

B. $\bigcup_{i=1}^{n} K^i = V \times V$ [1] *(tedy pro každou dvojici vrcholů* $u, v \in V$ *platí, že existuje cesta "po hranách z* K*" z vrcholu* u *do vrcholu* v*)*

Lemma 1. *G obsahuje HK právě když existuje soubor hran* $K \subseteq E$*, který je HK.*

---

[1] Pro dané soubory hran $K, L \subseteq E$ definujeme

$$K \cdot L := \{(u, v) \mid \exists w \in V : (u, w) \in K \text{ a } (w, v) \in L\}$$

Definujeme $K^1 = K$ a pro $i \geq 1$ definujeme $K^{i+1} := K^i \cdot K$. (Všimněte si, že $K^i \cdot K = K \cdot K^i$, a že $(u, v) \in K^i$ právě tehdy, když v grafu (V, K) existuje orientovaná cesta délky i z u do v.)

Důkaz. Nechť $v_0, v_1, \dots v_n$ je HK. Nyní soubor

$$K = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_0)\}$$

je zřejmě HK dle Definice 3.

Naopak, nechť K je HK. Definujme posloupnost vrcholů $v_0, v_1, \dots, v_n$ kde

- v_0 je libovolný vrchol
- pro každé $0 \leq i < n$ je v_{i+1} unikátní vrchol splňující $(v_i, v_{i+1}) \in K$

Ukážeme, že $\omega = v_0, v_1, \dots, v_n$ je HK. Z podmínky *A.* plyne, že definice ω je korektní, protože každé v_i má právě jednu výchozí hranu v K.

Zbývá dokázat podmínky *1. – 3.* z Definice 2. Podmínka *1.* plyne přímo z definice ω a z $K \subseteq E$. Podmínky *2.* a *3.* vyplynou snadno z následujícího tvrzení:

Pokud pro nějaká $0 \leq i < j \leq n$ platí $v_i = v_j$, pak pro každé $1 \leq \ell \leq n$ platí

$$\{u \mid (v_i, u) \in K^\ell\} \subseteq \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\} \tag{2}$$

Důkaz povedeme indukcí vzhledem k ℓ. Pokud $\ell = 1$, pak díky podmínce *A.*,

$$\{u \mid (v_i, u) \in K^\ell\} = \{u \mid (v_i, u) \in K\} = \{v_i, v_{i+1}\} \subseteq \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}$$

Předpokládejme, že (2) platí pro ℓ a uvažme $\ell + 1$. Nechť $(v_i, u) \in K^{\ell+1}$. Ukážeme, že $u \in \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}$. Jelikož $(v_i, u) \in K^{\ell+1} = K^\ell \cdot K$, existuje $w \in V$ takové, že $(v_i, w) \in K^\ell$ a $(w, u) \in K$. Z indukčního předpokladu (který aplikujeme na (v_i, w)) obdržíme, že $w \in \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}$, tedy $w = v_k$ pro nějaké $i \leq k \leq j$. Z definice ω plyne, že pokud $k < j$, pak $u = v_{k+1}$ a pokud $k = j$, pak $u = v_{i+1}$. Tedy $u \in \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}$.

Nyní můžeme snadno dokázat podmínky *2.* a *3.* z Definice 2. Nejprve předpokládejme, že podmínka *2.* není splněna, tedy že existují $0 \leq i < j < n$ taková, že $v_i = v_j$. Potom ovšem (2) implikuje, že existuje nejvýše $j - i < n$ vrcholů $u \in V$ takových, že $(v_i, u) \in \bigcup_{\ell=1}^n K^\ell$, což je ve sporu s podmínkou B. Nyní předpokládejme, že podmínka *3.* není splněna, tedy že $v_n \neq v_0$. Z Dirichletova principu plyne, že musí existovat $0 \leq i < j \leq n$ taková, že $v_i = v_j$. Z $v_n \neq v_0$ plyne buď $i > 0$ nebo $j < n$. Pak ovšem z (2) plyne, že existuje nejvýše $j - i < n$ vrcholů $u \in V$ takových, že $(v_i, u) \in \bigcup_{\ell=1}^n K^\ell$, což je ve sporu s podmínkou B. □

Díky Lemmatu 1 zřejmě stačí zkonstruovat formuli φ, která je splnitelná právě tehdy, když existuje množina K, která je HK dle Definice 2.

Nejprve musíme určit, jaké výrokové proměnné budeme ve formuli φ používat. Pro každou hranu $(u, v) \in E$ zavedeme výrokovou proměnnou X_{uv}. Každá valuace ν nám potom bude zadávat množinu hran

$$K_\nu = \{(u, v) \in E \mid \nu(X_{uv}) = 1\}$$

Formuli φ definujeme tak, aby $\nu(\varphi) = 1$ právě tehdy, když K_ν je HK. Potom Lemma 1 implikuje, že φ je splnitelná právě když graf G obsahuje HK. Formuli φ definujeme postupně tak, že nejprve definujeme formule, které zajistí podmínky A. a B. z Definice 2.

Podmínku *A.* je možné zajistit následující formulí

$$\xi := \bigwedge_{u \in V} \left(\bigvee_{(u,v) \in E} \left(X_{uv} \wedge \bigwedge_{(u,v') \in E \setminus \{(u,v)\}} \neg X_{uv'} \right) \right)$$

Lemma 2. *Pro libovolnou valuaci ν platí, že $\nu(\xi) = 1$ právě tehdy, když pro každé $u \in V$ existuje právě jedno $v \in V$ takové, že $(u, v) \in K_\nu$.*

Důkaz. Pokud $\nu(\xi) = 1$, pak pro každé $u \in V$ existuje $v \in V$ takové, že $(u, v) \in E$, $\nu(X_{uv}) = 1$ a pro každé $(u, v') \in E \setminus \{(u, v)\}$ platí $\nu(X_{uv'}) = 0$. Potom ovšem je v jediný vrchol splňující $(u, v) \in K_\nu$.

Naopak, předpokládejme, že pro každé $u \in V$ existuje právě jedno $v \in V$ takové, že $(u, v) \in K_\nu$. Potom pro každé $u \in V$ musí platit, že existuje právě jedno $v \in V$ takové, že $\nu(X_{uv}) = 1$. Potom ovšem $\nu(\xi) = 1$. $\square$

Abychom byli schopni zajistit podmínku *B.* z Definice 2, zavedeme nové výrokové proměnné tvaru X^i_{uv} kde $1 \le i \le n$. Definujeme formuli η tak, aby pro každou valuaci ν platilo, že $\nu(\eta) = 1$ právě tehdy, když pro každé $1 \le i \le n$ platí $K^i_\nu = \{(u, v) \mid \nu(X^i_{uv}) = 1\}$. Potom bude podmínka *B.* snadno vyjádřitelná pomocí formule $\eta \wedge \bigwedge_{u,v \in V} \bigvee_{i=1}^n X^i_{uv}$. (Intuice za X^i_{uv} a η je následující: formule η je splněna při valuacích ν, které jsou konzistentní v tom smyslu, že $\nu(X^i_{uv}) = 1$ právě tehdy, když v grafu (V, K_ν) existuje cesta délky i z u do v.)

$$\eta := \bigwedge_{i=1}^{n} \eta^i$$

kde formule η^i definujeme induktivně takto:

$$\begin{aligned}
\eta^1 &:= \bigwedge_{(u,v)\in E} \left(X^1_{uv} \leftrightarrow X_{uv}\right) \wedge \left(\bigwedge_{(w,z)\in(V\times V)\setminus E} \neg X^1_{wz} \right) \\
\eta^{i+1} &:= \bigwedge_{u,v\in V} \left(X^{i+1}_{uv} \leftrightarrow \bigvee_{(w,v)\in E} \left(X^i_{uw} \wedge X_{wv}\right) \right)
\end{aligned}$$

Lemma 3. *$\nu(\eta) = 1$ právě když pro každé $1 \le i \le n$ platí $K^i_\nu = \{(u, v) \mid \nu(X^i_{uv}) = 1\}$. Zejména $\nu(\eta \wedge \bigwedge_{u,v\in V} \bigvee_{i=1}^n X^i_{uv}) = 1$ právě tehdy, když $\bigcup_{i=1}^n K^i_\nu = V \times V$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\nu(\eta) = 1$. Dokážeme, že $K^i_\nu = \{(u, v) \mid \nu(X^i_{uv}) = 1\}$ indukcí vzhledem k i. Pokud $i = 1$ pak přímo z $\nu(\eta^i) = \nu(\eta^1) = 1$ dostaneme

$$K^1_\nu = K_\nu = \{(u, v) \in E \mid \nu(X_{uv}) = 1\} = \{(u, v) \mid \nu(X^1_{uv}) = 1\}$$

Předpokládejme, že tvrzení platí pro i a uvažme $i + 1$. Pak

$$\begin{aligned}
K^{i+1}_\nu &= K^i_\nu \cdot K_\nu && \text{(definice } K^{i+1}_\nu\text{)} \\
&= K^i_\nu \cdot \{(w, v) \in E \mid \nu(X_{wv}) = 1\} && \text{(definice } K_\nu\text{)} \\
&= \{(u, w) \mid \nu(X^i_{uw}) = 1\} \cdot \{(w, v) \in E \mid \nu(X_{wv}) = 1\} && \text{(indukční předpoklad)} \\
&= \{(u, v) \mid \exists w \in V : \nu(X^i_{uw}) = 1 \text{ a } \nu(X_{wv}) = 1\} && \text{(definice zřetězení } \cdot\text{)} \\
&= \{(u, v) \mid \nu(X^{i+1}_{uv}) = 1\} && (\nu(\eta^{i+1}) = 1)
\end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že pro každé $1 \le i \le n$ platí $K^i_\nu = \{(u, v) \mid \nu(X^i_{uv}) = 1\}$. Ukážeme, že $\nu(\eta^i) = 1$ pro každé $1 \le i \le n$ indukcí vzhledem k i. Předpokládejme nejprve, že $i = 1$. Pak

$$\{(u, v) \mid \nu(X^i_{uv}) = 1\} = K^i_\nu = K^1_\nu = K_\nu = \{(u, v) \in E \mid \nu(X_{uv}) = 1\}$$

a tedy $\nu(\eta^i) = 1$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro i a uvažme $i+1$. Pak dle našeho předpokladu,

$$K_\nu^{i+1} = \{(u,v) \mid \nu(X_{uv}^{i+1}) = 1\}$$

a zároveň

$$\begin{aligned}
K_\nu^{i+1} &= K_\nu^i \cdot K_\nu && \text{(definice } K_\nu^{i+1}\text{)} \\
&= \{(u,w) \mid \nu(X_{uw}^i)\} \cdot \{(w,v) \in E \mid \nu(X_{wv})\} && \text{(indukční předpoklad)} \\
&= \{(u,v) \mid \exists w \in V : \nu(X_{uw}^i) = 1 \text{ a } \nu(X_{wv}) = 1\} && \text{(definice zřetězení } \cdot\text{)}
\end{aligned}$$

Tedy

$$\{(u,v) \mid \nu(X_{uv}^{i+1}) = 1\} = K_\nu^{i+1} = \{(u,v) \mid \exists w \in V : \nu(X_{uw}^i) = 1 \text{ a } \nu(X_{wv}) = 1\}$$

To ovšem znamená, že pro libovoné vrcholy $u, v \in V$ platí

$$\nu(X_{uv}^{i+1}) = \nu\left(\bigvee_{(w,v)\in E} (X_{uw}^i \wedge X_{wv})\right)$$

a tedy $\nu(\eta^{i+1}) = 1$. $\square$

Na závěr definujeme formuli φ takto:

$$\varphi := \xi \wedge \eta \wedge \bigwedge_{u,v \in V} \bigvee_{i=1}^{n} X_{uv}^i$$

Lemma 2 a Lemma 3 implikují, že $\nu(\varphi) = 1$ právě když K_ν je HK. Potom ovšem Lemma 1 implikuje, že φ je splnitelná právě když G obsahuje HK.

Velikost formule φ se snadno odhadne takto:

$$|\varphi| \in \mathcal{O}(|\xi| + |\eta| + n^3)$$

kde

$$|\xi| \in \mathcal{O}(n^2)$$

a

$$|\eta| \in \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{n} |\eta^i|\right) \subseteq \mathcal{O}(n^4)$$

Celkem $|\varphi| \in \mathcal{O}(n^4)$.