Matematická logika

Materiály ke kurzu MA007

Poslední modifikace: 29. září 2009

Antonín Kučera

http://www.fi.muni.cz/usr/kucera/teaching.html

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Logika.

- Logika (z řeckého $\lambda o \gamma o \varsigma$) zkoumá způsob vyvozování závěrů z předpokladů.
- V běžné řeči se „logikou“ označuje myšlenková cesta, která vedla k daným závěrům.
- Logika nezkoumá lidské myšlení (psychologie) ani obecné hranice lidského poznání (epistemologie).
- *„Může všemohoucí Bůh stvořit kámen, který sám nedokáže uzvednout?“*

Logika. Neformální, formální, matematická.

- *Neformální* logika studuje problematiku správné argumentace v přirozeném jazyce.
- *Formální* logika definuje a studuje abstraktní *odvozovací pravidla* (tj. *„formy úsudků“*), jejichž platnost nezávisí na významu pojmů, které v nich vystupují.
- Pojmem *matematická logika* se obvykle myslí dvě různé oblasti výzkumu:
  - aplikace poznatků z oblasti formální logiky na matematiku (např. snaha „vnořit“ matematiku do logiky ve formě konečného systému axiomů a odvozovacích pravidel);
  - aplikace matematických struktur a technik ve formální logice (např. teorie modelů, teorie důkazů, apod.)

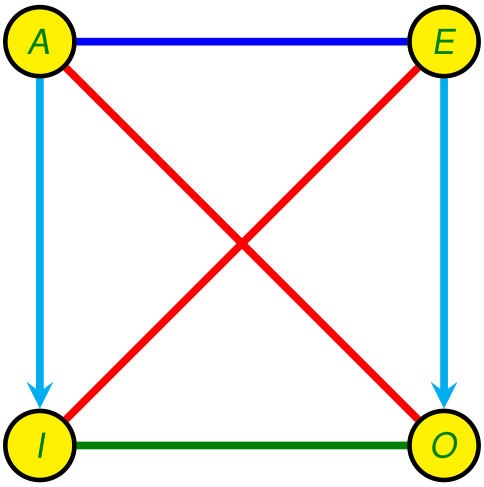
Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Aristotelova logika.

- Považován za zakladatele formální logiky.
- Zavedl a prozkoumal pojem *sylogismu*.
- Aristoteles zkoumal také pravdivostní módy a položil tak základy modální logiky.

Aristoteles (384-322 př. Kr.)

Aristotelova logika. Logický čtverec.



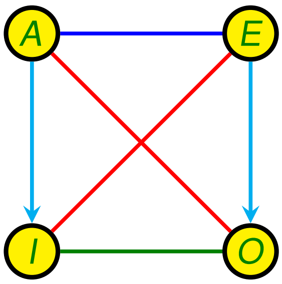
Nechť S a P jsou *neprázdné* vlastnosti. Aristoteles rozlišuje následující základní *kategorická tvrzení*:

- A „*všechna S jsou P*“
- E „*žádná S nejsou P*“
- I „*některá S jsou P*“
- O „*některá S nejsou P*“

Mnemonika: AffIrmo—nEgO (tvrdím—popírám)

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Aristotelova logika. Logický čtverec. (2)



- A a O jsou kontradiktorická, tj. nemohou být současně pravdivá ani současně nepravdivá. I a E jsou rovněž kontradiktorická.
- A a E jsou kontrární, tj. mohou být současně nepravdivá ale ne současně pravdivá.
- I a O jsou subkontrární, tj. mohou být současně pravdivá ale ne současně nepravdivá.
- I je subalterní (podřízené) A, tj. I je pravdivé jestliže A je pravdivé, a současně A je nepravdivé jestliže I je nepravdivé. Podobně O je subalterní E.

Aristotelova logika. Sylogismy.

- Sylogismy jsou jednoduché úsudky tvaru

  Hlavní premisa
  Vedlejší premisa
  $\therefore$ *Závěr*

- Obě premisy i závěr jsou kategorická tvrzení tvaru A, E, I, O obsahující dohromady právě tři vlastnosti S, M, P, kde
  - hlavní premisa obsahuje P a M;
  - vedlejší premisa obsahuje S a M;
  - závěr je tvaru $S \text{ z } P$.
- Lze tedy rozlišit následující čtyři *formy* sylogismů:

I:	II:	III:	IV:
$M \text{ x } P$	$P \text{ x } M$	$M \text{ x } P$	$P \text{ x } M$
$S \text{ y } M$	$S \text{ y } M$	$M \text{ y } S$	$M \text{ y } S$
$\therefore S \text{ z } P$	$\therefore S \text{ z } P$	$\therefore S \text{ z } P$	$\therefore S \text{ z } P$

- Celkem tedy existuje $4 \cdot 4^3 = 256$ sylogismů.

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

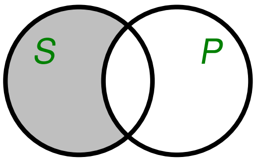
Aristotelova logika. Sylogismy. (2)

- Jen 24 sylogismů je *platných*:

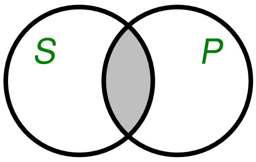
  „Barbara, Celarent, Darii, Ferioque prioris
  Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundae
  Tertia grande sonans recitat Darapti, Felapton
  Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison. Quartae
  Sunt Bamalip, Calames, Dimatis, Fesapo, Fresison.“

  - Forma I: AAA, EAE, AII, EIO (Barbara, Celarent, Darii, Ferioque), AAI, EAO (subalterní módy);
  - Forma II: EAE, AEE, EIO, AOO, (Cesare, Camestres, Festino, Baroco), AEO, EAO (subalterní módy);
  - Forma III: AAI, EAO, IAI, AII, OAO, EIO (Darapti, Felapton, Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison);
  - Forma IV: AAI, AEE, IAI, EAO, EIO (Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison), AEO (subalterní mód).
- O (ne)platnosti sylogismů se lze snadno přesvědčit pomocí *Vennových diagramů* (John Venn, 1834–1923).

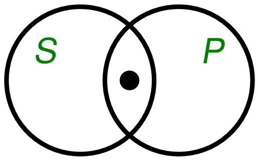
Aristotelova logika. Platnost sylogismů.



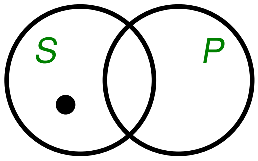
A
(všechna *S* jsou *P*)



E
(žádná *S* nejsou *P*)



I
(některá *S* jsou *P*)



O
(některá *S* nejsou *P*)

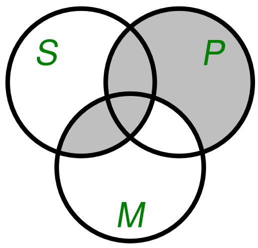
- šedé oblasti jsou prázdné;
- symbol „•“ označuje neprázdné oblasti;
- bílé oblasti mohou být prázdné i neprázdné.

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Aristotelova logika. Platnost sylogismů. (2)

- Uvažme nyní např. *AEE* sylogismus druhé formy (Camestres):

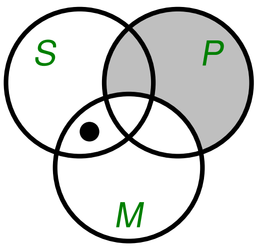
  Všechna P jsou M
  Žádná S nejsou M
  $\therefore$ *Žádná S nejsou P*

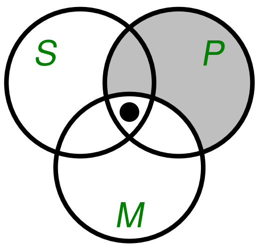


  Tento sylogismus je tedy platný.

- Pro *AIO* sylogismus druhé formy dostáváme:

  Všechna P jsou M
  Některá S jsou M
  $\therefore$ *Některá S nejsou P*



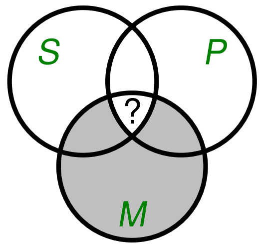


  Druhý diagram podává protipříklad, sylogismus platný není.

Aristotelova logika. Platnost sylogismů. (3)

Rozeberme ještě *AAI* sylogismus třetí formy (Darapti):

Všechna M jsou P
Všechna M jsou S
$\therefore$ *Některá S jsou P*



Tento sylogismus je v Aristotelově logice považován za *platný*. Je však třeba použít předpoklad, že každá vlastnost je *neprázdná*. Tento předpoklad ale přináší jisté problémy:

Všechny skleněné hory jsou skleněné.
Všechny skleněné hory jsou hory.
$\therefore$ *Některé hory jsou skleněné.*

Hlavní i vedlejší premisa jsou na intuitivní úrovni pravdivá tvrzení, závěr však nikoliv.

Booleova „algebra logiky".

George Boole (1815–1864)

- Aplikoval algebraické techniky při formalizaci procesu odvozování. Nalezl souvislost mezi algebrou a sylogismy.
- Booleova „algebra logiky" se chová podobně jako algebra čísel. Násobení odpovídá logické spojce *„a současně"*, sčítání logické spojce *„nebo"*, apod. (Odtud pocházejí pojmy *„logický součin"* a *„logický součet"*.).

Algebra logiky. Motivační příklad.

Uvažme následující sylogismus:

Všechna S jsou M
Žádná M nejsou P
$\therefore$ *Žádná S nejsou P*

Pokud vlastnosti identifikujeme se soubory objektů univerza, pro které platí, můžeme uvedený sylogismus přepsat na

$$\begin{array}{rl} & S \subseteq M \\ & M \cap P = 0 \\ \therefore & S \cap P = 0 \end{array} \qquad \text{a dále na} \qquad \begin{array}{rll} & S \cap M' = 0 & (1) \\ & M \cap P = 0 & (2) \\ \therefore & S \cap P = 0 & (3) \end{array}$$

Pokusme se nyní „odvodit“ (3) z (1) a (2):

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod

Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy

Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému

Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost

Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti

Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Algebra logiky. Motivační příklad. (2)

- Z toho, že $S \cap M' = 0$ a $0 \cap X = 0$ pro libovolné X dostáváme

  $(S \cap M') \cap P = 0$ (4)
- Podobně z (2) plyne $(M \cap P) \cap S = 0$ (5).
- Ze (4), (5) a faktu, že $0 \cup 0 = 0$, plyne

  $((S \cap M') \cap P) \cup ((M \cap P) \cap S) = 0$ (6)
- Užitím asociativity a komutativity $\cup$ a $\cap$ dostáváme z (6)

  $((S \cap P) \cap M') \cup ((S \cap P) \cap M) = 0$ (7)
- Nyní podle distributivního zákona lze (7) přepsat na

  $(S \cap P) \cap (M' \cup M) = 0$ (8)
- Jelikož $X \cup X' = 1$ a $X \cap 1 = X$ pro libovolné X, dostáváme z (8)

  $S \cap P = 0$

  což bylo dokázat.

Algebra logiky. Motivační příklad. (3)

V předchozím příkladu jsme k dokázání sylogismu použili symbolickou manipulaci se symboly S, M a P podle následujících *algebraických identit* (tj. nezabývali jsme se tím, jaký mají symboly $\cup$, $\cap$, 0, 1, a $'$ *význam*).

$$\begin{array}{rcl}
X \cup X & = & X \\
X \cap X & = & X \\
X \cup Y & = & Y \cup X \\
X \cap Y & = & Y \cap X \\
X \cup (Y \cup Z) & = & (X \cup Y) \cup Z \\
X \cap (Y \cap Z) & = & (X \cap Y) \cap Z \\
X \cap (X \cup Y) & = & X \\
X \cup (X \cap Y) & = & X \\
X \cap (Y \cup Z) & = & (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\
X \cup (Y \cap Z) & = & (X \cup Y) \cap (X \cup Z)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
X \cup X' & = & 1 \\
X \cap X' & = & 0 \\
X'' & = & X \\
X \cup 1 & = & 1 \\
X \cap 1 & = & X \\
X \cup 0 & = & X \\
X \cap 0 & = & 0 \\
(X \cup Y)' & = & X' \cap Y' \\
(X \cap Y)' & = & X' \cup Y'
\end{array}$$

Matematická logika
Antonín Kučera

Algebra logiky. Motivační příklad. (4)

- Tyto identity definují algebraickou strukturu, které se později začalo říkat *Booleva algebra* (případně *Booleův svaz*).
- V původní Booleově notaci se
  - místo $X \cap Y$ píše $X.Y$ (případně jen XY);
  - místo $X \cup Y$ píše $X + Y$;
  - místo X' píše $1 - X$.

  V této notaci pak identity dostávají číselnou podobu a Boole sám se pokoušel převést další číselné konstrukce (např. dělení, ale i Taylorův rozvoj) do své „algebry logiky“. Tyto úvahy však již byly zcela mylné.

Algebra logiky. Dva základní problémy.

- Podle Boolea je každý sylogismus možné zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} F_1(P,M,A) &= 0 \\ F_2(S,M,B) &= 0 \\ \therefore \quad F(S,P,C) &= 0 \end{aligned}$$

  kde $F_1(P,M,A)$, $F_2(S,M,B)$, $F(S,P,C)$ jsou vhodné výrazy vytvořené ze symbolů 0, 1, $\cup$, $\cap$, $'$ a symbolů v závorkách.
- Symboly A, B, C plní roli „blíže neurčených vlastností“ při přepisu kategorických tvrzení I a O. Např. „některá S jsou P“ Boole vyjádřil pomocí rovnosti $S \cap A = P \cap A$, tj. $(S \cap A) \cap (P \cap A)' = 0$, kde A je blíže neurčená vlastnost. Tento postup *není* zcela korektní.

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Algebra logiky. Dva základní problémy. (2)

- Boole uvážil obecnější úsudky tvaru

$$\begin{aligned} F_1(A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_k(A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_n) &= 0 \\ \therefore \quad F(B_1,\ldots,B_n) &= 0 \end{aligned}$$

- Cílem jeho snah bylo vyvinout metodu, která umožní
  - zjistit, zda je daný úsudek *pravdivý*;
  - nalézt *nejobecnější* závěr (F) pro dané předpoklady ($F_1,\ldots,F_k$).

Algebra logiky. Booleova metoda.

Definice 1

Nechť $\vec{A} = A_1,\dots,A_n$. $\vec{A}$-konstituent je výraz tvaru $\ell_1 \cap \dots \cap \ell_n$, kde ℓ_i je buď A_i nebo A_i'.

Věta 2

Pro každé $F(X_1,\cdots,X_n)$ platí

$$F(X_1,\cdots,X_n) = \bigcup_{\vec{v}\in\{0,1\}^n} F(\vec{v}) \cap \ell_1(\vec{v}) \cap \dots \cap \ell_n(\vec{v})$$

kde $\ell_i(\vec{v})$ je buď X_i nebo X_i' podle toho, zda je $\vec{v}_i$ rovno 1 nebo 0.

Příklad 3

Nechť $F(A,B) = (A \cup B') \cap (A' \cup B)$. Pak

$$\begin{aligned} F(A,B) &= (F(0,0) \cap A' \cap B') \cup (F(0,1) \cap A' \cap B) \\ &\quad \cup (F(1,0) \cap A \cap B') \cup (F(1,1) \cap A \cap B) \\ &= (1 \cap A' \cap B') \cup (0 \cap A' \cap B) \cup (0 \cap A \cap B') \cup (1 \cap A \cap B) \\ &= (A' \cap B') \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod

Aristotelova logika
- Logický čtverec
- Sylogismy

Booleova algebra logiky
- Dva zákl. problémy
- Řešení 1. problému
- Řešení 2. problému

Výroková logika
- Syntaxe
- Sémantika
- Plnohodnotnost
- Kompaktnost
- Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
  - Korektnost
  - Úplnost

Predikátová logika
- Syntaxe
- Sémantika
- Odvozovací systém
- Věta o úplnosti

Věta o neúplnosti
- Turingův stroj
- Důkaz věty o neúplnosti
- Gödelův důkaz
- 2. věta o neúplnosti

Algebra logiky. Řešení 1. problému.

Věta 4

Úsudek

$$\begin{aligned} F_1(A_1,\dots,A_m,B_1,\dots,B_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_k(A_1,\dots,A_m,B_1,\dots,B_n) &= 0 \\ \therefore \quad F(B_1,\dots,B_n) &= 0 \end{aligned}$$

je platný, právě když každý $\vec{A},\vec{B}$-konstituent výrazu F je $\vec{A},\vec{B}$-konstituentem některého F_i.

Algebra logiky. Řešení 1. problému. (2)

Příklad 5

Uvažme opět sylogismus

$$\begin{array}{rrcl} & S \cap M' & = & 0 \\ & M \cap P & = & 0 \\ \therefore & S \cap P & = & 0 \end{array}$$

Pak $\vec{A} = M$ a $\vec{B} = S, P$. Uvažme $\vec{A}, \vec{B}$-konstituenty jednotlivých výrazů:

$$\begin{array}{rcl} S \cap M' & : & M' \cap S \cap P,\ \ M' \cap S \cap P' \\ M \cap P & : & M \cap S \cap P,\ \ M \cap S' \cap P \\ S \cap P & : & M \cap S \cap P,\ \ M' \cap S \cap P \end{array}$$

Podle věty 4 je tento úsudek pravdivý.

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Algebra logiky. Řešení 2. problému.

- Nechť $\vec{A} = A_1, \ldots, A_m$, $\vec{B} = B_1, \ldots, B_n$. Uvažme předpoklady tvaru

$$F_1(\vec{A}, \vec{B}) = 0, \cdots, F_k(\vec{A}, \vec{B}) = 0$$

- Cílem je nalézt nejobecnější závěr tvaru $F(\vec{B}) = 0$. Označme

$$E(\vec{A}, \vec{B}) = F_1(\vec{A}, \vec{B}) \cup \cdots \cup F_k(\vec{A}, \vec{B})$$

Algebra logiky. Řešení 2. problému. (2)

Věta 6

Nejobecnější závěr $F(\vec{B}) = 0$, který plyne z $E(\vec{A}, \vec{B}) = 0$, je tvaru

$$F(\vec{B}) \quad = \quad \bigcap_{\vec{v}\in\{0,1\}^m} E(\vec{v}, \vec{B})$$

Příklad 7

Nejobecnější závěr $F(S, P)$ plynoucí z předpokladů $S \cap M' = 0$ a $M \cap P = 0$ je tvaru

$$\begin{aligned} F(S,P) &= ((S\cap 0')\cup(0\cap P))\cap((S\cap 1')\cup(1\cap P)) \\ &= S\cap P \end{aligned}$$

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výstavba formálních logických systémů.

- Potřebujeme znát jisté pojmy a umět myslet (*metaúroveň*).
  - Musí být např. jasné, co myslíme symbolem, konečnou posloupností, atd.
  - Metapojmy a formální pojmy se bohužel často „značí“ stejně. Tím vzniká (nesprávný) dojem, že formální pojmy jsou definovány pomocí „sebe sama“ (typickým příkladem je *důkaz* nebo *množina*).
  - Co všechno si lze na metaúrovni dovolit? (*potenciální* vs. *aktuální* nekonečno).
- Základní kroky:
  - Vymezení užívaných symbolů (abeceda).
  - Syntaxe formulí.
  - Sémantika (zde se objeví pojem *pravdivost*).
  - Odvozovací systém (zde se objeví pojem *dokazatelnost*).

Výroková logika. Syntaxe.

Definice 8

Abecedu výrokové logiky tvoří následující symboly:

- *znaky pro výrokové proměnné $A, B, C, \ldots$, kterých je spočetně mnoho;*
- *logické spojky $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$*
- *závorky (a)*

Definice 9

Formule výrokové logiky je slovo φ nad abecedou výrokové logiky, pro které existuje vytvořující posloupnost, tj. konečná posloupnost slov $\psi_1, \cdots, \psi_k$, kde $k \geq 1$, ψ_k je φ, a pro každé $1 \leq i \leq k$ má slovo ψ_i jeden z následujících tvarů:

- *výroková proměnná,*
- *$\neg\psi_j$ pro nějaké $1 \leq j < i$,*
- *$(\psi_j \circ \psi_{j'})$ pro nějaká $1 \leq j, j' < i$, kde $\circ$ je jeden ze symbolů $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.*

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod

Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy

Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému

Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost

Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti

Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Syntaxe. (2)

Poznámka 10

V dalším textu budeme často vynechávat v zápisech formulí *vnější* závorky. Např. místo $(A \vee \neg B)$ budeme psát $A \vee \neg B$. Po zavedení *sémantiky* výrokové logiky budeme často vynechávat i další dvojice závorek v případě, kdy vzniklá *syntaktická* nejednoznačnost nepovede k *sémantické* nejednoznačnosti.

Výroková logika. Sémantika.

Definice 11

Pravdivostní ohodnocení (valuace) je zobrazení v, které každé výrokové proměnné přiřadí hodnotu 0 nebo 1.

Metamatematickou indukcí k délce vytvořující posloupnosti lze každou valuaci v jednoznačně rozšířit na všechny výrokové formule:

- $v(A)$ je již definováno;
- $$v(\neg\psi) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } v(\psi) = 1; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$
- $$v(\psi_1 \wedge \psi_2) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } v(\psi_1) = 0 \text{ nebo } v(\psi_2) = 0; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$
- $$v(\psi_1 \vee \psi_2) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } v(\psi_1) = 0 \text{ a současně } v(\psi_2) = 0; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$
- $$v(\psi_1 \rightarrow \psi_2) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } v(\psi_1) = 1 \text{ a současně } v(\psi_2) = 0; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Sémantika. (2)

Definice 12

- *Výroková formule φ je*
  - *pravdivá (resp. nepravdivá) při valuaci v, pokud $v(\varphi) = 1$ (resp. $v(\varphi) = 0$);*
  - *splnitelná, jestliže existuje valuace v taková, že $v(\varphi) = 1$;*
  - *tautologie (také (logicky) pravdivá), jestliže $v(\varphi) = 1$ pro každou valuaci v.*
- *Soubor T výrokových formulí je splnitelný, jestliže existuje valuace v taková, že $v(\varphi) = 1$ pro každé φ z T.*
- *Formule φ a ψ jsou ekvivalentní, psáno $\varphi \approx \psi$, právě když pro každou valuaci v platí, že $v(\varphi) = v(\psi)$.*

Výroková logika. Sémantika. (3)

Příklad 13

- Formule $A \vee B$ je pravdivá při valuaci v_1, kde $v_1(A) = v_1(B) = 1$, a nepravdivá při valuaci v_2, kde $v_2(A) = 0$. Jde tedy o splnitelnou formuli, která není tautologií.
- Pro každou formuli φ platí, že φ je tautologie právě když $\neg\varphi$ není splnitelná.
- Nechť φ, ψ, ξ jsou výrokové formule. Pak:

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi &\approx \psi \wedge \varphi \\ \varphi \wedge (\psi \wedge \xi) &\approx (\varphi \wedge \psi) \wedge \xi \\ \varphi \wedge (\psi \vee \xi) &\approx (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \xi) \\ \neg(\varphi \wedge \psi) &\approx \neg\varphi \vee \neg\psi \\ \neg\neg\varphi &\approx \varphi \end{aligned}$$

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Sémantika. (4)

Poznámka 14

„Identity“ z posledního bodu *příkladu 13* umožňují dále zpřehlednit zápis formulí. Např. místo $(A \vee B) \vee C$ můžeme (nejednoznačně) psát $A \vee B \vee C$. Tato nejednoznačnost nevede k problémům, neboť příslušné definice a tvrzení „fungují“ pro libovolné možné uzávorkování.

Poznámka 15

V teorii *výpočetní složitosti* se dokazuje, že problém zda daná výroková formule φ je splnitelná (resp. tautologie) je *NP-úplný* (resp. *co-NP-úplný*). Otázka, zda existuje efektivní (polynomiální) algoritmus pro uvedené problémy, je ekvivalentní otázce zda $P = NP$.

Definice 16

Formule φ je tautologickým důsledkem souboru formulí T, psáno $T \models \varphi$, jestliže $v(\varphi) = 1$ pro každou valuaci v takovou, že $v(\psi) = 1$ pro každou formuli ψ ze souboru T. Jestliže $T \models \varphi$ pro prázdný soubor T, píšeme krátce $\models \varphi$.

Výroková logika. Pravdivostní tabulky.

Někdy se sémantika výrokových spojek definuje „předem" pomocí *pravdivostních tabulek*:

X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

X	Y	$X \to Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

X	$\neg X$
0	1
1	0

Pojmy „pravdivostní tabulka" a „výroková spojka" je možné dále zobecnit a uvážit formální logické systémy budované na obecnějším základu:

Definice 17

Výroková funkce je funkce $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, kde $n \geq 1$.

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Systém $\mathcal{L}(F_1, \cdots, F_k)$.

Definice 18

Nechť $F_1, \cdots, F_k$ je konečný soubor výrokových funkcí. Definujeme formální logický systém $\mathcal{L}(F_1, \cdots, F_k)$, kde

- *Abeceda je tvořena znaky pro výrokové proměnné, závorkami a znaky $\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_k$ pro uvedené výrokové funkce.*
- *V definici vytvořující posloupnosti formule (viz definice 9) požadujeme, aby ψ_i bylo buď výrokovou proměnnou nebo tvaru $\mathcal{F}_j(\psi_{j_1}, \cdots, \psi_{j_n})$, kde $1 \leq j_1, \cdots, j_n < i$ a n je arita F_j.*
- *Valuace rozšíříme z výrokových proměnných na formule předpisem $v(\mathcal{F}(\psi_1, \cdots, \psi_n)) = F(v(\psi_1), \cdots, v(\psi_n))$*

Poznámka 19

Ve smyslu *definice 18* je dosud uvažovaný systém výrokové logiky systémem $\mathcal{L}(\wedge, \vee, \to, \neg)$. Dříve zavedené sémantické pojmy (splnitelnost, pravdivost, atd.) se opírají pouze o pojem valuace a „fungují" tedy v *libovolném* systému $\mathcal{L}(F_1, \cdots, F_k)$.

Výroková logika. Systém $\mathcal{L}(F_1, \cdots, F_k)$. (2)

Pro účely následující definice zvolme libovolné (ale dále pevné) lineární uspořádání $\sqsubseteq$ na souboru všech výrokových proměnných.

Definice 20

Nechť φ je formule $\mathcal{L}(F_1, \cdots, F_k)$ a nechť $X_1, \cdots, X_n$ je vzestupně uspořádaná posloupnost (vzhledem k $\sqsubseteq$) všech výrokových proměnných, které se ve φ vyskytují. Formule φ jednoznačně určuje výrokovou funkci $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ danou předpisem $F_\varphi(\vec{u}) = v_{\vec{u}}(\varphi)$, kde $v_{\vec{u}}$ je valuace definovaná takto:

- $v_{\vec{u}}(X_i) = \vec{u}(i)$ *pro každé* $1 \le i \le n$,
- $v_{\vec{u}}(Y) = 0$ *pro ostatní* Y.

Definice 21

Systém $\mathcal{L}(F_1, \cdots, F_k)$ je plnohodnotný, jestliže pro každou výrokovou funkci F existuje formule φ systému $\mathcal{L}(F_1, \cdots, F_k)$ taková, že $F = F_\varphi$.

Matematická logika

Antonín Kučera

Výroková logika. Plnohodnotnost.

Věta 22

Systém $\mathcal{L}(\wedge, \vee, \neg)$ je plnohodnotný.

Důkaz. Nechť $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ je výroková funkce a nechť $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_k$ jsou všechny vektory z $\{0,1\}^n$, pro které nabývá F hodnoty 1. Pokud žádný takový vektor není (tj. $k = 0$), klademe $\varphi = X_1 \wedge \neg X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n$. Jinak

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^{k} \ell_1(u_i) \wedge \cdots \wedge \ell_n(u_i)$$

kde $\ell_j(u_i)$ je buď X_j nebo $\neg X_j$ podle toho, zda $u_i(j) = 1$ nebo $u_i(j) = 0$. Nyní se lehce ověří, že $F = F_\varphi$. $\square$

Výroková logika. Plnohodnotnost. (2)

- Uvažme následující výrokové funkce:

X	Y	$X \curlywedge Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

X	Y	$X \mid Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

X	Y	Z	$\odot(X,Y,Z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

- Funkce $\curlywedge$ se nazývá *Schröderův* operátor. Platí $\varphi \curlywedge \psi \approx \neg(\varphi \vee \psi)$.
- Funkce $\mid$ se nazývá *Shefferův* operátor. Platí $\varphi \mid \psi \approx \neg(\varphi \wedge \psi)$.

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Plnohodnotnost. (3)

Následující systémy výrokové logiky jsou plnohodnotné:

- $\mathcal{L}(\wedge,\vee,\neg)$ *Věta 22*.
- $\mathcal{L}(\wedge,\neg)$ $\varphi \vee \psi \approx \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- $\mathcal{L}(\vee,\neg)$ $\varphi \wedge \psi \approx \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$ $\varphi \vee \psi \approx \neg\varphi \rightarrow \psi$
- $\mathcal{L}(\curlywedge)$ $\neg\varphi \approx \varphi \curlywedge \varphi, \quad \varphi \vee \psi \approx (\varphi \curlywedge \psi) \curlywedge (\varphi \curlywedge \psi)$
- $\mathcal{L}(\mid)$ $\neg\varphi \approx \varphi \mid \varphi, \quad \varphi \wedge \psi \approx (\varphi \mid \psi) \mid (\varphi \mid \psi)$
- $\mathcal{L}(\odot)$ $\neg\varphi \approx \odot(\varphi,\varphi,\varphi)$,
  $\varphi \rightarrow \psi \approx \odot(\varphi,\odot(\varphi,\varphi,\varphi),\odot(\varphi,\psi,\odot(\varphi,\varphi,\varphi)))$

Následující systémy plnohodnotné nejsou:

- $\mathcal{L}(\wedge)$, $\mathcal{L}(\vee)$, $\mathcal{L}(\rightarrow)$, $\mathcal{L}(\neg)$, atd.

Výroková logika. Shefferovské spojky.

Definice 23

Výroková funkce F je Shefferovská jestliže $\mathcal{L}(F)$ je plnohodnotný systém.

Věta 24

- *Nechť $S(n)$ značí počet všech Shefferovských funkcí arity $n \geq 1$. Pak $S(n) = 2^{(2^{n-1}-1)}(2^{(2^{n-1}-1)} - 1)$. (Pro $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ dostáváme postupně $0, 2, 56, 16256, 1073709056, \ldots$)*
- *Jelikož $\lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{2^{2^n}} = 1/4$, je (pro velká n) zhruba čtvrtina ze všech výrokových funkcí arity n Shefferovská.*

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod

Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy

Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému

Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost

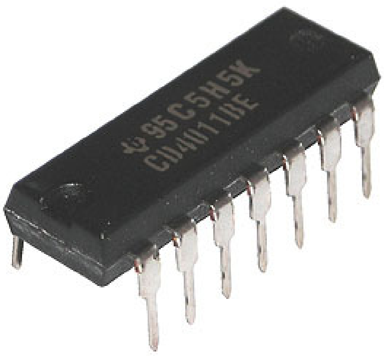
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti

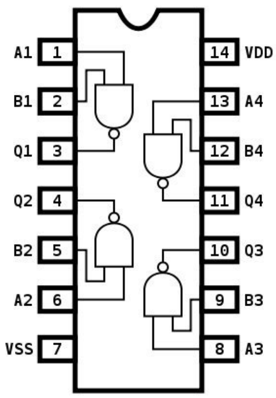
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Shefferovské spojky. (2)

Poznámka 25

Výsledky o Shefferovských funkcích nalézají uplatnění při výrobě logických obvodů; na „podkladové desce“ se např. vytvoří hustá síť binárních |-hradel. Obvody různé funkce se pak realizují jejich vhodným propojením.





Integrovaný obvod 4011 CMOS se čtyřmi |-hradly.

Výroková logika. Normální formy.

Definice 26

- *Literál je formule tvaru X nebo $\neg X$, kde X je výroková proměnná;*
- *Klauzule je formule tvaru $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n$, kde $n \geq 1$ a každé ℓ_i je literál.*
- *Duální klauzule je formule tvaru $\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_n$, kde $n \geq 1$ a každé ℓ_i je literál.*
- *Formule v konjunktivním normálním tvaru (CNF) je formule tvaru $C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$, kde $m \geq 1$ a každé C_i je klauzule.*
- *Formule v disjunktivním normálním tvaru je formule tvaru $C_1 \vee \cdots \vee C_m$, kde $m \geq 1$ a každé C_i je duální klauzule.*

Okamžitým důsledkem věty 22 je následující:

Věta 27

Pro každou formuli φ existuje ekvivalentní formule v disjunktivním normálním tvaru.

Matematická logika
Antonín Kučera

Výroková logika. Normální formy. (2)

Věta 28

Pro každou formuli φ existuje ekvivalentní formule v konjunktivním normálním tvaru.

Důkaz. Podle Věty 27 existuje k φ ekvivalentní formule v disjunktivním normálním tvaru, tj. $\varphi \approx \bigvee_{i=1}^{n} D_i$, kde $n \geq 1$ a každé D_i je duální klauzule. Metaindukcí vzhledem k n:

- $n = 1$. Pak $\bigvee_{i=1}^{n} D_i$ je současně v CNF.
- *Indukční krok:* Nechť $D_1 = \ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k$. Platí

$$\bigvee_{i=1}^{n+1} D_i \approx D_1 \vee \bigvee_{i=2}^{n+1} D_i \approx D_1 \vee \bigwedge_{i=1}^{m} C_i \approx \bigwedge_{i=1}^{m} D_1 \vee C_i \approx \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k} (\ell_j \vee C_i)$$

□

Výroková logika. Normální formy. (3)

Příklad 29

Formuli $(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (C \to A)$ lze v CNF reprezentovat jako

- $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee A)$

nebo

- $(\neg A \vee C) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$.

CNF tedy *není* určena jednoznačně až na pořadí klauzulí a literálů.

Matematická logika

Antonín Kučera

Výroková logika. Věta o kompaktnosti.

Věta 30 (o kompaktnosti)

Nechť T je soubor formulí výrokové logiky. T je splnitelný právě když každá konečná část T je splnitelná.

Důkaz. Směr „⇒“ je triviální. Dokážeme „⇐“. Zavedeme pomocný pojem: soubor V výrokových formulí je *dobrý*, jestliže každý konečný podsoubor V je splnitelný. Nechť $\psi_1, \psi_2, \ldots$ je posloupnost *všech* formulí výrokové logiky. Metamatematickou indukcí definujeme pro každé $i \geq 1$ *dobrý* soubor S_i:

- $S_1 = T$. Soubor S_1 je dobrý neboť T je dobrý.
- $S_{i+1} = \begin{cases} S_i \cup \{\psi_i\} & \text{jestliže } S_i \cup \{\psi_i\} \text{ je dobrý;} \\ S_i \cup \{\neg\psi_i\} & \text{jinak.} \end{cases}$

  Alespoň jeden ze souborů $S_i \cup \{\psi_i\}$ a $S_i \cup \{\neg\psi_i\}$ *musí* být dobrý; jinak existují konečné $V_1 \subseteq S_i \cup \{\psi_i\}$ a $V_2 \subseteq S_i \cup \{\neg\psi_i\}$, které nejsou splnitelné. Jestliže $V_1 \subseteq S_i$ nebo $V_2 \subseteq S_i$, máme ihned spor s tím, že S_i je dobrý; jinak $V_1 \cup V_2$ obsahuje ψ_i i $\neg\psi_i$, proto i $(V_1 \cup V_2) \setminus \{\psi_i, \neg\psi_i\} \subseteq S_i$ je nesplnitelný, spor.

Výroková logika. Věta o kompaktnosti. (2)

Nechť $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Dokážeme, že S má následující vlastnosti:

- *S obsahuje φ právě když S neobsahuje $\neg\varphi$.*
  S nutně obsahuje φ nebo $\neg\varphi$. Jestliže S obsahuje φ i $\neg\varphi$, existuje S_i obsahující φ i $\neg\varphi$; tedy $\{\varphi, \neg\varphi\}$ je nesplnitelný podsoubor S_i, spor.
- *S obsahuje $\varphi \wedge \psi$ právě když S obsahuje φ i ψ;*
- *S obsahuje $\varphi \vee \psi$ právě když S obsahuje φ nebo ψ;*
- *S obsahuje $\varphi \rightarrow \psi$ právě když S neobsahuje φ nebo obsahuje ψ.*

Buď v valuace definovaná takto: $v(A) = 1$ právě když A patří do S. Indukcí k délce vytvořující posloupnosti se nyní snadno ověří (s využitím výše uvedených vlastností S), že:

- *S obsahuje φ právě když $v(\varphi) = 1$.*

Tedy S (a proto i T) je splnitelný. $\square$

Výroková logika. Věta o kompaktnosti. (3)

Užitím *věty 30* lze snadno dokázat řadu dalších tvrzení.

- *Graf* $\mathcal{G}$ je dvojice (U, H), kde U je nejvýše spočetný soubor *uzlů* a H je areflexivní a symetrická relace na U.
- *Podgraf* grafu $\mathcal{G}$ je graf $\mathcal{G}' = (U', H')$, kde $U' \subseteq U$ a $H' \subseteq H$.
- Graf $\mathcal{G} = (U, H)$ je *k-obarvitelný* jestliže existuje funkce $f : U \rightarrow \{1, \cdots, k\}$ taková, že $f(u) \neq f(v)$ pro každé $(u, v) \in H$.

Výroková logika. Věta o kompaktnosti. (4)

Věta 31

Graf $\mathcal{G} = (U, H)$ je k-obarvitelný právě když každý konečný podgraf $\mathcal{G}$ je k-obarvitelný.

Důkaz. Nechť $B_{u,i}$ je výroková proměnná pro každý uzel u a každé $1 \leq i \leq k$. Buď T soubor tvořený následujícími formulemi:

- $B_{u,1} \vee \cdots \vee B_{u,k}$ pro každý uzel u;
- $B_{u,i} \rightarrow \neg B_{u,j}$ pro každý uzel u a každé $1 \leq i,j \leq k$, kde $i \neq j$;
- $B_{u,i} \rightarrow \neg B_{v,i}$ pro každé $(u,v) \in H$ a $1 \leq i \leq k$.

Platí následující pozorování:

- Graf $\mathcal{G}$ je k-obarvitelný právě když soubor T je splnitelný.
- Každý konečný podgraf $\mathcal{G}$ je k-obarvitelný právě když každý konečný podsoubor T je splnitelný.

Nyní stačí aplikovat větu 30. $\square$

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$.

V této části se soustředíme na $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$. Uvažme následující odvozovací systém pro $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$ (Lukasiewicz, 1928):
Schémata axiómů:

- A1: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- A2: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \xi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \xi))$
- A3: $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Odvozovací pravidlo:

- MP: Z φ a $\varphi \rightarrow \psi$ odvoď ψ. (modus ponens)

Výroková logika. Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$. (2)

Definice 32

Buď T soubor formulí.

- *Důkaz formule ψ z předpokladů T je konečná posloupnost formulí $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$, kde φ_k je ψ a pro každé φ_i, kde $1 \le i \le k$, platí alespoň jedna z následujících podmínek:*
  - *φ_i je prvek T;*
  - *φ_i je instancí jednoho ze schémat A1–A3;*
  - *φ_i vznikne aplikací pravidla MP na formule φ_m, φ_n pro vhodné $1 \le m, n < i$.*
- *Formule ψ je dokazatelná z předpokladů T, psáno $T \vdash \psi$, jestliže existuje důkaz ψ z předpokladů T. Jestliže $T \vdash \psi$ pro prázdné T, říkáme že ψ je dokazatelná a píšeme $\vdash \psi$.*

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod

Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy

Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému

Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost

Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti

Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$. (3)

Příklad 33

Pro libovolnou formuli φ platí $\vdash \varphi \to \varphi$.

Důkaz. Následující posloupnost formulí je důkazem $\varphi \to \varphi$.

1)	$(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$	$A2$
2)	$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	$A1$
3)	$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	MP na 2), 1)
4)	$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	$A1$
5)	$\varphi \to \varphi$	MP na 4), 3)

$\square$

Výroková logika. Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$. (4)

Příklad 34

Pro libovolné formule φ, ψ platí $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$.

Důkaz. Následující posloupnost formulí je důkazem ψ z $\{\varphi, \neg\varphi\}$:

1)	$\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	$A1$
2)	$\neg\varphi$	předpoklad
3)	$\neg\psi \to \neg\varphi$	MP na $2), 1)$
4)	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$	$A3$
5)	$\varphi \to \psi$	MP na $3), 4)$
6)	φ	předpoklad
7)	ψ	MP na $6), 5)$

□

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Věta o dedukci.

Věta 35 (o dedukci)

Nechť φ, ψ jsou formule a T soubor formulí. Pak $T \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ právě když $T \vdash \psi \to \varphi$.

Důkaz.
„$\Leftarrow$“: Nechť $\xi_1, \cdots, \xi_k$ je důkaz formule $\psi \to \varphi$ z předpokladů T. Pak $\xi_1, \cdots, \xi_k, \psi, \varphi$ je důkaz formule φ z předpokladů $T \cup \{\psi\}$ (poslední formule vznikne aplikací MP na ψ a ξ_k).

„$\Rightarrow$“: Nechť $\xi_1, \cdots, \xi_k$ je důkaz φ z předpokladů $T \cup \{\psi\}$. Metaindukcí k j dokážeme, že $T \vdash \psi \to \xi_j$ pro každé $1 \le j \le k$.

- $j = 1$. Je-li ξ_1 instance axiómu nebo formule z T, platí $T \vdash \xi_1$. K důkazu ξ_1 z T nyní připojíme formule $\xi_1 \to (\psi \to \xi_1)$, $\psi \to \xi_1$. První formule je instancí A1, druhá aplikací MP na ξ_1 a první formuli. Máme tedy důkaz $\psi \to \xi_1$ z T.
  Je-li ξ_1 formule ψ, platí $T \vdash \psi \to \psi$ podle *příkladu 33*.

Výroková logika. Věta o dedukci. (2)

- *Indukční krok:* Je-li formule ξ_j instancí axiómu nebo prvek $T \cup \{\psi\}$, postupujeme stejně jako výše (místo ξ_1 použijeme ξ_j).
  Je-li ξ_j výsledkem aplikace MP na ξ_m, ξ_n, kde $1 \leq m, n < j$, je ξ_n tvaru $\xi_m \rightarrow \xi_j$. Podle I.P. navíc platí $T \vdash \psi \rightarrow \xi_m$ a $T \vdash \psi \rightarrow (\xi_m \rightarrow \xi_j)$. Důkazy $\psi \rightarrow \xi_m$ a $\psi \rightarrow (\xi_m \rightarrow \xi_j)$ z T nyní zřetězíme za sebe a připojíme následující formule:
  - $(\psi \rightarrow (\xi_m \rightarrow \xi_j)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \xi_m) \rightarrow (\psi \rightarrow \xi_j))$
  - $(\psi \rightarrow \xi_m) \rightarrow (\psi \rightarrow \xi_j)$
  - $\psi \rightarrow \xi_j$

  První formule je instancí A2, další dvě vzniknou aplikací MP. Máme tedy důkaz formule $\psi \rightarrow \xi_j$ z T.

$\square$

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Věta o korektnosti.

Věta 36 (o korektnosti)

Nechť φ je formule a T soubor formulí. Jestliže $T \vdash \varphi$, pak $T \models \varphi$.

Důkaz. Nechť $\xi_1, \cdots, \xi_k$ je důkaz φ z T. Indukcí vzhledem k j dokážeme, že $T \models \xi_j$ pro každé $1 \leq j \leq k$. (Stačí ověřit, že každá instance A1–A3 je tautologie, a že jestliže $T \models \psi$ a $T \models \psi \rightarrow \xi$, pak také $T \models \xi$). $\square$

Výroková logika. Věta o úplnosti.

Lema 37

Nechť φ, ψ *jsou formule. Pak*

(a) $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

(b) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$

(c) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

(d) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

(e) $\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$

(f) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi)$

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod

Aristotelova logika
- Logický čtverec
- Sylogismy

Booleova algebra logiky
- Dva zákl. problémy
- Řešení 1. problému
- Řešení 2. problému

Výroková logika
- Syntaxe
- Sémantika
- Plnohodnotnost
- Kompaktnost
- Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
  - Korektnost
  - Úplnost

Predikátová logika
- Syntaxe
- Sémantika
- Odvozovací systém
- Věta o úplnosti

Věta o neúplnosti
- Turingův stroj
- Důkaz věty o neúplnosti
- Gödelův důkaz
- 2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Věta o úplnosti. (2)

Důkaz.

- (a): Podle *příkladu 34* platí $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$, proto $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ opakovaným užitím věty o dedukci.
- (b): Platí

1)	$\vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$	podle (a)
2)	$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$	věta o dedukci
3)	$\vdash (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$	$A3$
4)	$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	MP na 2), 3)
5)	$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$	věta o dedukci
6)	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	věta o dedukci

- (c): Platí

1)	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	podle (b)
2)	$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	$A3$
3)	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	MP na 1), 2)

Výroková logika. Věta o úplnosti. (3)

- (d): Platí

1)	$\{\varphi \to \psi\} \vdash \varphi \to \psi$	
2)	$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$	podle (b) a věty o dedukci
3)	$\{\varphi \to \psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \psi$	MP na 2), 1)
4)	$\vdash \psi \to \neg\neg\psi$	podle (c)
5)	$\{\varphi \to \psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\psi$	MP na 3), 4)
6)	$\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$	věta o dedukci
7)	$\vdash (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	$A3$
8)	$\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	MP na 6), 7)
9)	$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	věta o dedukci

- (e): Platí

1)	$\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$	
2)	$\{\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$	věta o dedukci
3)	$\vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$	podle (d)
4)	$\{\varphi\} \vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$	MP na 2), 3)
5)	$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$	věta o dedukci

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Věta o úplnosti. (4)

- (f): Platí

1)	$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi))$	podle (d)
2)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$	2x MP na 1)
3)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\varphi \to \psi\} \vdash \psi$	MP na 2), $\neg\varphi \to \psi$
4)	$\{\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \psi$	věta o dedukci
5)	$\vdash \neg\psi \to (\neg\psi \to \neg(\neg\psi \to \psi))$	podle (e)
6)	$\{\neg\psi\} \vdash \neg(\neg\psi \to \psi)$	2x věta o dedukci
7)	$\vdash \neg\psi \to \neg(\neg\psi \to \psi)$	věta o dedukci
8)	$\vdash (\neg\psi \to \neg(\neg\psi \to \psi)) \to ((\neg\psi \to \psi) \to \psi)$	$A3$
9)	$\vdash (\neg\psi \to \psi) \to \psi$	MP na 7), 8)
10)	$\{\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi\} \vdash \psi$	MP na 4), 9)
11)	$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi)$	2x věta o dedukci

$\square$

Výroková logika. Věta o úplnosti. (5)

Definice 38

Nechť v je valuace a φ formule. Jestliže $v(\varphi) = 1$, označuje symbol φ^v formuli φ. Jinak φ^v označuje formuli $\neg\varphi$.

Lema 39 (A. Church)

Nechť v je valuace, φ formule, a $\{X_1, \cdots, X_k\}$ konečný soubor výrokových proměnných, kde všechny proměnné vyskytující se ve φ jsou mezi $\{X_1, \cdots, X_k\}$. Pak $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \varphi^v$.

Důkaz. Indukcí k délce vytvořující posloupnosti pro φ.

- Je-li $\varphi = X$, pak X je mezi $\{X_1, \cdots, X_k\}$ a tedy $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash X^v$.
- Je-li $\varphi = \neg\psi$, kde $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \psi^v$, rozlišíme dvě možnosti:
  - $v(\psi) = 0$. Pak $\psi^v = \neg\psi$ a $\varphi^v = \neg\psi$, není co dokazovat.
  - $v(\psi) = 1$. Pak $\psi^v = \psi$ a $\varphi^v = \neg\neg\psi$. Podle *lematu 37 (c)* platí $\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$, proto $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \neg\neg\psi$ užitím MP.

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Věta o úplnosti. (6)

- Je-li $\varphi = \psi \rightarrow \xi$, kde $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \psi^v$ a $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \xi^v$ rozlišíme následující možnosti:
  - $v(\psi \rightarrow \xi) = 1$. Máme tedy dokázat, že $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \psi \rightarrow \xi$.
    - Jestliže $v(\psi) = 0$, platí $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \neg\psi$. Podle *lematu 37 (a)* dále platí $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \xi)$, proto $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \psi \rightarrow \xi$ užitím MP.
    - Jestliže $v(\xi) = 1$, platí $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \xi$. Podle A1 platí $\vdash \xi \rightarrow (\psi \rightarrow \xi)$, proto $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \psi \rightarrow \xi$ užitím MP.
  - $v(\psi \rightarrow \xi) = 0$. Pak $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \psi$ a $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \neg\xi$. Máme dokázat, že $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \xi)$. Podle *lematu 37 (e)* platí $\vdash \psi \rightarrow (\neg\xi \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \xi))$, proto $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \xi)$ opakovaným užitím MP.

$\square$

Výroková logika. Věta o úplnosti. (7)

Věta 40 (o úplnosti)

Nechť φ je formule a T soubor formulí. Jestliže $T \models \varphi$, pak $T \vdash \varphi$.

Důkaz. Nejprve uvážíme případ, kdy T je *prázdný* soubor. Nechť φ je tautologie a $X_1, \cdots, X_k$ všechny výrokové proměnné, které se ve φ vyskytují.

- Podle Churchova lematu platí $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \varphi$ pro *libovolné* v.
- Ukážeme, že všechny X_i^v lze postupně „eliminovat“, až dostaneme důkaz φ z prázdného souboru formulí.

Předpokládejme, že pro dané $0 \leq n < k$ jsme již prokázali, že

$$\{X_1^v, \cdots, X_n^v, X_{n+1}^v\} \vdash \varphi$$

pro *libovolné* v. Dokážeme, že pak také $\{X_1^u, \cdots, X_n^u\} \vdash \varphi$ pro libovolné u.

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Věta o úplnosti. (8)

Buď tedy u libovolná valuace. Nechť u_1, u_2 jsou valuace definované takto:

- $u_1(X_{n+1}) = 1$, $u_2(X_{n+1}) = 0$
- pro každé $Y \neq X_{n+1}$ platí $u_1(Y) = u_2(Y) = u(Y)$.

Platí

1)	$\{X_1^u, \cdots, X_n^u, X_{n+1}\} \vdash \varphi$	předpoklad pro $v = u_1$
2)	$\{X_1^u, \cdots, X_n^u, \neg X_{n+1}\} \vdash \varphi$	předpoklad pro $v = u_2$
3)	$\{X_1^u, \cdots, X_n^u\} \vdash X_{n+1} \rightarrow \varphi$	věta o dedukci na 1)
4)	$\{X_1^u, \cdots, X_n^u\} \vdash \neg X_{n+1} \rightarrow \varphi$	věta o dedukci na 2)
5)	$\vdash (X_{n+1} \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\neg X_{n+1} \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$	podle *lematu 37 (f)*
6)	$\{X_1^u, \cdots, X_n^u\} \vdash \varphi$	2x MP na 5) s využitím 3), 4)

Výroková logika. Věta o úplnosti. (9)

Nyní uvážíme obecný případ. Buď T *libovolný* soubor formulí a φ formule taková, že $T \models \varphi$. Podle věty o kompaktnosti existuje konečný soubor $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ formulí z T takový, že $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\} \models \varphi$. Lehce se ověří, že

$$\models \psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow (\psi_3 \rightarrow \cdots (\psi_n \rightarrow \varphi) \cdots)$$

Podle předchozího bodu tedy platí

$$\vdash \psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow (\psi_3 \rightarrow \cdots (\psi_n \rightarrow \varphi) \cdots)$$

Po n aplikacích věty o dedukci dostáváme $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\} \vdash \varphi$, tedy také $T \vdash \varphi$. □

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Historické poznámky.

- Výroková logika nebyla rozvíjena samostatně, ale jako součást složitějších formálních systémů.
- *Gottlob Frege* (1848–1925) položil základy predikátové logiky a zavedl „moderní“ odvozovací systém. „Výrokový fragment“ tohoto systému vypadá takto (verze z roku 1879):
  - 1: $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
  - 2: $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
  - 3: $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$
  - 4: $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
  - 5: $\neg\neg P \rightarrow P$
  - 6: $P \rightarrow \neg\neg P$
  - Odvozovací pravidla: MP a substituce

  Fregeho výsledky byly vědeckou komunitou ignorovány zhruba 20 let.

Výroková logika. Historické poznámky. (2)

- Giuseppe Peano (1858-1932) doporučil na mezinárodním matematickém kongresu v Paříži (rok 1900) mladému *Bertrandu Russellovi* (1872-1970) studovat Fregeho práce. Russell v roce 1901 objevil inkonzistenci ve Fregeho systému (Russellův paradox), současně plně docenil Fregeho myšlenky. V letech 1910-1913 byla publikována třídílná *Principia Mathematica* (autoři Whitehead, Russell). Tato monografie měla hluboký vliv na vývoj logiky v následujících desetiletích. Věnována byla Fregemu. Pro fragment výrokové logiky byly použity následující axiómy a odvozovací pravidla:
  - 1: $(P \vee P) \rightarrow P$
  - 2: $Q \rightarrow (P \vee Q)$
  - 3: $(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$
  - 4: $(P \vee (Q \vee R)) \rightarrow (Q \vee (P \vee R))$
  - 5: $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))$
  - Odvozovací pravidla: MP a substituce

Matematická logika
Antonín Kučera

Výroková logika. Historické poznámky. (3)

- V roce 1917 nalezl Jean Nicod následující zjednodušení axiomatického systému z *Principia Mathematica*:
  - 1: $(P \vee P) \rightarrow P$
  - 2: $P \rightarrow (P \vee Q)$
  - 4: $(P \vee (Q \vee R)) \rightarrow (Q \vee (P \vee R))$
  - 5: $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))$
  - Odvozovací pravidla: MP a substituce

Výroková logika. Historické poznámky. (4)

- Ve stejném roce publikoval Henry Sheffer následující axiomatický systém založený na Shefferově operátoru:
  - Axióm: $(P|(Q|R))|((S|(S|S))|((U|Q)|((P|U)|(P|U))))$
  - Odvozovací pravidla: substituce a „z F a $F|(G|H)$ odvoď H“
- David Hilbert (1862–1943) a Wilhelm Ackermann (1896-1962) publikovali v roce 1928 následující systém:
  - 1: $(P \vee P) \rightarrow P$
  - 2: $P \rightarrow (P \vee Q)$
  - 4: $(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$
  - 5: $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))$
  - Odvozovací pravidla: MP a substituce
- V roce 1927 navrhl John von Neumann (1903-1957) aplikovat substituci pouze na axiómy. Vznikly systémy založené na *schématech axiómů*.

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod

Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy

Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému

Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost

Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti

Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Výroková logika. Historické poznámky. (5)

- Jan Lukasiewicz (1878–1956) prezentoval svůj odvozovací systém (použitý v přednášce) v roce 1928.
- Další odvozovací systémy:
  - V roce 1947 zjednodušili Götling a Rasiowa systém z *Principia Mathematica* do následující podoby:
    - 1: $(P \vee P) \rightarrow P$
    - 2: $P \rightarrow (P \vee Q)$
    - 3: $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))$
    - Odvozovací pravidla: MP a substituce
  - V roce 1953 prezentoval Meredith systém s jediným schématem a jediným odvozovacím pravidlem:
    - Schéma axiómu: $((((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varrho \rightarrow \neg\xi)) \rightarrow \varrho) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \varphi) \rightarrow (\xi \rightarrow \varphi))$
    - Odvozovací pravidlo: MP

Predikátová logika. Vznik a vývoj.

- *Predikátová logika* (také *logika prvního řádu*) se opírá o pojem *vlastnosti* (tj. *predikátu*). Umožňuje formulovat tvrzení o vlastnostech objektů s využitím *kvantifikátorů*.
- Např. Aristotelova logika je z dnešního pohledu fragmentem predikátové logiky.
- Formule prvního řádu byly součástí Fregeho systému, později se objevily ve 3. dílu Schröderovy monografie *Algebra der Logik* (1910) a monografii *Principia Mathematica* (Whitehead, Russel).
- Logika prvního řádu byla definována jako samostatný systém až v monografii Hilberta a Ackermanna *Grundzügen der theoretischen Logik* (1928).

Matematická logika
Antonín Kučera

Predikátová logika. Syntaxe.

Definice 41

Jazyk (stejně jako jazyk s rovností) je systém predikátových symbolů a funkčních symbolů, kde u každého symbolu je dána jeho četnost (arita), která je nezáporným celým číslem.

Poznámka 42

- Predikáty arity nula v jistém smyslu odpovídají *výrokovým proměnným*, funkční symboly arity nula jsou symboly pro *konstanty*.
- Predikátovým a funkčním symbolům se také říká *mimologické symboly*. Jazyk je tedy plně určen mimologickými symboly.
- Rozdíl mezi *jazykem* a *jazykem s rovností* se projeví v tom, že do predikátové logiky pro jazyk s rovností přidáme speciální logický symbol $=$ jehož sémantika bude definována speciálním způsobem.

Predikátová logika. Syntaxe. (2)

Příklad 43

- Jazyk *teorie množin* je jazykem s rovností, který obsahuje jeden predikátový symbol $\in$ arity 2.
- Jazyk *teorie pologrup* je jazykem s rovností, který obsahuje jeden funkční symbol „·“ arity 2.

Definice 44

Abecedu predikátové logiky pro jazyk $\mathcal{L}$ tvoří následující symboly:

- *Znaky pro proměnné $x, y, z, \ldots$, kterých je spočetně mnoho*
- *Mimologické symboly, tj. predikátové a funkční symboly jazyka $\mathcal{L}$.*
- *Je-li $\mathcal{L}$ jazyk s rovností, obsahuje abeceda speciální znak $=$ pro rovnost.*
- *Logické spojky $\to$ a $\neg$.*
- *Symbol $\forall$ pro univerzální kvantifikátor.*
- *Závorky (a).*

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Syntaxe. (3)

Definice 45

Termem jazyka $\mathcal{L}$ je slovo t nad abecedou predikátové logiky pro jazyk $\mathcal{L}$, pro které existuje vytvořující posloupnost slov $t_1, \cdots, t_k$, kde $k \geq 1$, t_k je t, a pro každé $1 \leq i \leq k$ má slovo t_i jeden z následujících tvarů:

- *proměnná,*
- *$f(t_{i_1}, \cdots, t_{i_n})$, kde $1 \leq i_1, \cdots, i_n < k$, f je funkční symbol jazyka $\mathcal{L}$, a n je arita f.*

Term je uzavřený, jestliže neobsahuje proměnné.

Poznámka 46

U binárních funkčních symbolů (a později také predikátů) dovolíme pro větší čitelnost infixový zápis. U funkčních (a predikátových) symbolů arity nula budeme psát c místo $c()$.

Predikátová logika. Syntaxe. (4)

Příklad 47

- $(x \cdot y) \cdot z$ je termem jazyka pologrup (v prefixové notaci $\cdot(\cdot(x,y),z)$)
- $0 + (S(0) + S(S(0)))$ je termem jazyka $0, S, +$, kde 0, S a $+$ jsou po řadě funkční symboly arity nula, jedna a dva.

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod

Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy

Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému

Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost

Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti

Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Syntaxe. (5)

Definice 48

Formule predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$ je slovo φ nad abecedou predikátové logiky pro jazyk $\mathcal{L}$, pro které existuje vytvořující posloupnost slov $\psi_1, \cdots, \psi_k$, kde $k \geq 1$, ψ_k je φ, a pro každé $1 \leq i \leq k$ má slovo ψ_i jeden z následujících tvarů:

- *$P(t_1, \cdots, t_n)$, kde P je predikátový symbol jazyka $\mathcal{L}$ arity n a $t_1, \cdots, t_n$ jsou termy jazyka $\mathcal{L}$.*
- *$t_1 = t_2$, je-li $\mathcal{L}$ jazyk s rovností a t_1, t_2 jsou termy jazyka $\mathcal{L}$.*
- *$\neg\psi_j$ pro nějaké $1 \leq j < i$,*
- *$(\psi_j \to \psi_{j'})$ pro nějaká $1 \leq j, j' < i$,*
- *$\forall x\, \psi_j$, kde x je proměnná a $1 \leq j < i$.*

Predikátová logika. Syntaxe. (6)

Poznámka 49

Ve zbytku přednášky budeme používat následující „zkratky“:

- $\exists x\, \varphi$ značí $\neg \forall x\, \neg \varphi$
- $\varphi \vee \psi$ značí $\neg \varphi \to \psi$
- $\varphi \wedge \psi$ značí $\neg(\varphi \to \neg \psi)$.
- $\varphi \leftrightarrow \psi$ značí $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$, kde symbol $\wedge$ dále „rozvineme“ podle předchozího bodu.

Příklady formulí:

- $\forall x\, P(x,y) \wedge \exists x\,(P(x,x) \vee Q(c))$
- $\forall x\, \exists x\,(P(x,x) \vee \forall y\, \forall x\, Q(x))$

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Syntaxe. (7)

Definice 50

Každý výskyt proměnné ve formuli predikátového počtu je buď volný nebo vázaný podle následujícího induktivního předpisu:

- *Ve formuli tvaru $P(t_1, \cdots, t_n)$ jsou všechny výskyty proměnných volné.*
- *Výrokové spojky nemění charakter výskytů proměnných, tj. je-li daný výskyt proměnné ve formuli ψ volný (resp. vázaný), je odpovídající výskyt ve formulích $\neg\psi$, $\varphi \to \psi$, $\psi \to \varphi$ rovněž volný (resp. vázaný).*
- *Ve formuli $\forall x\, \psi$ je každý výskyt proměnné x (včetně výskytu za kvantifikátorem) vázaný; byl-li výskyt proměnné různé od x volný (resp. vázaný) ve formuli ψ, je odpovídající výskyt ve formuli $\forall x\, \psi$ rovněž volný (resp. vázaný).*

Příklady (volné výskyty jsou červené):

- $\forall x\, P(x,y) \vee \forall y\, P(x,y)$
- $\forall x\,(P(x,y) \vee \forall y\, P(x,y))$

Predikátová logika. Syntaxe. (8)

Definice 51

- *Proměnná se nazývá volnou (resp. vázanou) ve formuli, má-li v ní volný (resp. vázaný) výskyt.*
- *Formule je otevřená, jestliže v ní žádná proměnná nemá vázaný výskyt.*
- *Formule je uzavřená (také sentence), jestliže v ní žádná proměnná nemá volný výskyt.*
- *Zápis $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ značí, že všechny volné proměnné ve formuli φ jsou mezi $x_1, \cdots, x_n$ (nemusí nutně platit, že každá z těchto proměnných je volná ve φ).*
- *Univerzální uzávěr formule φ je formule tvaru $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$, kde $x_1, \cdots, x_n$ jsou právě všechny volné proměnné formule φ.*

Predikátová logika. Substituce.

Definice 52

Term t je substituovatelný za proměnnou x ve formuli φ, jestliže žádný výskyt proměnné v termu t se nestane vázaným po provedení substituce termu t za každý volný výskyt proměnné x ve formuli φ. Je-li t substituovatelný za x ve φ, značí zápis $\varphi(x/t)$ formuli, která vznikne nahrazením každého volného výskytu x ve φ termem t.

Příklady:

- Term $y + 3$ je substituovatelný za x ve formuli $\exists z\, x{+}y{=}z$
- Term $y + z$ není substituovatelný za x ve formuli $\exists z\, x{+}y{=}z$
- $(P(x, y) \ \wedge\ \forall x\, P(x, y))(x/3)$ je formule $P(3, y) \ \wedge\ \forall x\, P(x, y)$
- $P(x, y)(x/y)(y/x)$ je formule $P(x, x)$

Predikátová logika. Substituce. (2)

Definice 53

Nechť φ je formule a $t_1, \cdots, t_n$ termy, které jsou v uvedeném pořadí substituovatelné za proměnné $x_1, \cdots, x_n$ ve φ (předpokládáme, že $x_1, \cdots, x_n$ jsou různé). Symbol $\varphi(x_1/t_1, \cdots, x_n/t_n)$ značí formuli, která vznikne „simultánním nahrazením" každého volného výskytu x_i termem t_i pro každé $1 \leq i \leq n$. Přesněji, $\varphi(x_1/t_1, \cdots, x_n/t_n)$ je formule $\varphi(x_1/z_1)\cdots(x_n/z_n)(z_1/t_1)\cdots(z_n/t_n)$, kde $z_1, \cdots, z_n$ jsou (různé) proměnné, které se nevyskytují v $t_1, \cdots, t_n$ ani mezi $x_1, \cdots, x_n$.

Příklad:

- $P(x, y)(x/y, y/x)$ je formule $P(y, x)$

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Realizace jazyka.

Definice 54

Realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ je zadána

- *neprázdným souborem M, nazývaným univerzem (případně nosičem). Prvky univerza nazýváme individui.*
- *přiřazením, které každému n-árnímu predikátovému symbolu P přiřadí n-ární relaci P_M na M*
- *přiřazením, které každému m-árnímu funkčnímu symbolu přiřadí funkci $f_M : M^m \rightarrow M$.*

Ohodnocení je zobrazení přiřazující proměnným prvky univerza M.

Predikátová logika. Realizace jazyka. (2)

Definice 55

Realizaci termu t při ohodnocení e v relizaci $\mathcal{M}$, psáno $t^{\mathcal{M}}[e]$ (případně jen $t[e]$ je-li $\mathcal{M}$ jasné z kontextu), definujeme induktivně takto:

- $x[e] = e(x)$
- $f(t_1, \cdots, t_m)[e] = f_M(t_1[e], \cdots, t_m[e])$
  (pro $m = 0$ je na pravé straně uvedené definující rovnosti $f_M(\emptyset)$).

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Realizace jazyka. (3)

Definice 56 (A. Tarski)

Buď $\mathcal{M}$ realizace $\mathcal{L}$, e ohodnocení a φ formule predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$. Ternární vztah $\mathcal{M} \models \varphi[e]$ definujeme indukcí ke struktuře φ:

- $\mathcal{M} \models P(t_1, \cdots, t_m)[e]$ *právě když* $(t_1[e], \cdots, t_m[e]) \in P_{\mathcal{M}}$.
- *Jestliže $\mathcal{L}$ je jazyk s rovností, definujeme* $\mathcal{M} \models (t_1 = t_2)[e]$ *právě když* $t_1[e]$ *a* $t_2[e]$ *jsou stejná individua.*
- $\mathcal{M} \models \neg\psi[e]$ *právě když není* $\mathcal{M} \models \psi[e]$.
- $\mathcal{M} \models (\psi \to \xi)[e]$ *právě když* $\mathcal{M} \models \xi[e]$ *nebo není* $\mathcal{M} \models \psi[e]$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\, \psi[e]$ *právě když* $\mathcal{M} \models \psi[e(x/a)]$ *pro každý prvek a univerza M.*

Jestliže $\mathcal{M} \models \varphi[e]$, říkáme, že φ je pravdivá v $\mathcal{M}$ při ohodnocení e. Jestliže $\mathcal{M} \models \varphi[e]$ pro každé e, je φ pravdivá v $\mathcal{M}$, psáno $\mathcal{M} \models \varphi$.

Predikátová logika. Realizace jazyka. (4)

Příklad 57

Buď $\mathcal{L}$ jazyk s jedním unárním predikátem P a $\mathcal{M}$ jeho realizace nad univerzem $M = \{a, b\}$, kde $P_M = \{a\}$. Pak

- Platí $\mathcal{M} \models \exists x\,(P(x) \to (P(x) \wedge \neg P(x)))$
- Neplatí $\mathcal{M} \models P(x) \to \forall x\,P(x)$
- Neplatí $\mathcal{M} \models (\forall x\,P(x) \to \forall x\,\neg P(x)) \to \forall x\,(P(x) \to \neg P(x))$

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Teorie.

Definice 58

Buď $\mathcal{L}$ jazyk (příp. jazyk s rovností).

- *Teorie (s jazykem $\mathcal{L}$) je soubor T formulí predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$. Prvky T se nazývají axiómy teorie T.*
- *Realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ je model teorie T, psáno $\mathcal{M} \models T$, jestliže $\mathcal{M} \models \varphi$ pro každé φ z T.*
- *Teorie je splnitelná, jestliže má model.*
- *Je-li $\mathcal{M}$ realizace jazyka $\mathcal{L}$, pak $Th(\mathcal{M})$ označuje teorii tvořenou právě všemi uzavřenými formulemi, které jsou v $\mathcal{M}$ pravdivé.*
- *Formule φ je sémantickým důsledkem teorie T, psáno $T \models \varphi$, jestliže φ je pravdivá v každém modelu teorie T.*

Predikátová logika. Teorie. (2)

Příklad 59

Uvažme jazyk s rovností obsahující jeden binární funkční symbol "$\cdot$" a jednu konstantu 1. Nechť T je tvořena následujícími formulemi:

- $\forall x \forall y \forall z \;\; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- $\forall x \;\; (x \cdot 1 = x) \wedge (1 \cdot x = x)$
- $\forall x \exists y \;\; (x \cdot y = 1) \wedge (y \cdot x = 1)$

Pak formule $\forall x \forall y \;\; (x \cdot y) = (y \cdot x)$ není sémantickým důsledkem T, zatímco formule $x \cdot (1 \cdot y) = (1 \cdot x) \cdot y$ ano.

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Odvozovací systém.

- Schémata *výrokových axiómů*:
  - P1: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - P2: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \xi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \xi))$
  - P3: $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- Schéma *axiómu specifikace*:
  - P4: $\forall x \, \varphi \rightarrow \varphi(x/t)$, kde t je substituovatelný za x ve φ.
- Schéma *axiómu distribuce*:
  - P5: $(\forall x \, (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x \, \psi)$, kde x nemá volný výskyt ve φ.
- Odvozovací pravidla:
  - MP: Z φ a $\varphi \rightarrow \psi$ odvoď ψ. (*modus ponens*)
  - GEN: Z φ odvoď $\forall x \, \varphi$. (*generalizace*)

Predikátová logika. Odvozovací systém. (2)

Je-li $\mathcal{L}$ jazyk s rovností, přidáme dále následující *axiómy rovnosti*:

- R1: $x = x$
- R2: $(x_1{=}y_1 \wedge \cdots \wedge x_n{=}y_n \wedge P(x_1, \cdots, x_n)) \rightarrow P(y_1, \cdots, y_n)$, kde P je predikátový symbol arity n.
- R3: $(x_1{=}y_1 \wedge \cdots \wedge x_m{=}y_m) \rightarrow (f(x_1, \cdots, x_m){=}f(y_1, \cdots, y_m))$, kde f je funkční symbol arity m.

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod

Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy

Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému

Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost

Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti

Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Odvozovací systém. (3)

Definice 60

Buď T teorie jazyka $\mathcal{L}$. Důkaz formule ψ v teorii T je konečná posloupnost formulí $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$, kde φ_k je ψ a pro každé φ_i, kde $1 \leq i \leq k$, platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- *φ_i je prvek T;*
- *φ_i je instancí jednoho ze schémat P1–P5;*
- *$\mathcal{L}$ je jazyk s rovností a φ_i je instancí jednoho ze schémat R1–R3;*
- *φ_i vznikne aplikací MP na formule φ_m, φ_n pro vhodné $1 \leq m, n < i$.*
- *φ_i vznikne aplikací GEN na formuli φ_m pro vhodné $1 \leq m < i$.*

Predikátová logika. Odvozovací systém. (4)

Definice 61

Buď T teorie jazyka $\mathcal{L}$.

- *Formule ψ je dokazatelná v teorii T, psáno $T \vdash \psi$, jestliže existuje důkaz ψ v T. Jestliže $T \vdash \psi$ pro prázdné T, říkáme že ψ je dokazatelná a píšeme $\vdash \psi$.*
- *Formule ψ je vyvratitelná v teorii T, jestliže $T \vdash \neg\psi$*
- *Teorie T je sporná (též inkonzistentní), jestliže každá formule predikátové logiky jazyka $\mathcal{L}$ je v T dokazatelná.*
- *Teorie je bezesporná (též konzistentní), jestliže není nekonzistentní.*

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Důkazy.

Poznámka 62 (Princip dosazení do tautologie výrokového počtu)

Je-li φ tautologií $\mathcal{L}(\neg,\rightarrow)$, ve které nahradíme výrokové proměnné formulemi predikátové logiky tak, že daná výroková proměnná je nahrazena vždy *touž* formulí, obdržíme formuli predikátové logiky, která je dokazatelná v odvozovacím systému predikátové logiky pouze pomocí P1–P3 a MP.

Poznámka 63 (Neplatnost „obecné“ věty o dedukci)

Za předpokladu korektnosti odvozovacího systému pro predikátovou logiku neplatí $\vdash \varphi \rightarrow \forall x\, \varphi$. Platí ovšem $\{\varphi\} \vdash \forall x\, \varphi$. Proto *obecně neplatí*, že $T \models \varphi \rightarrow \psi$ právě když $T \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Predikátová logika. Věta o dedukci.

Věta 64 (o dedukci)

Nechť T je teorie jazyka $\mathcal{L}$, ψ uzavřená formule jazyka $\mathcal{L}$ a φ (libovolná) formule jazyka $\mathcal{L}$. Pak $T \vdash \psi \to \varphi$ právě když $T \cup \{\psi\} \vdash \varphi$.

Důkaz. Důkaz je velmi podobný důkazu věty 35:

„$\Rightarrow$“: Nechť $\xi_1, \cdots, \xi_k$ je důkaz formule $\psi \to \varphi$ v T. Pak $\xi_1, \cdots, \xi_k, \psi, \varphi$ je důkaz φ v $T \cup \{\psi\}$ (poslední formule vznikne aplikací MP na ψ a ξ_k).

„$\Leftarrow$“: Nechť $\xi_1, \cdots, \xi_k$ je důkaz φ v $T \cup \{\psi\}$. Metaindukcí k j dokážeme, že $T \vdash \psi \to \xi_j$ pro každé $1 \leq j \leq k$.

- $j = 1$. Je-li ξ_1 instance axiómu nebo formule z T, platí $T \vdash \xi_1$. K důkazu ξ_1 z T nyní připojíme formule $\xi_1 \to (\psi \to \xi_1)$, $\psi \to \xi_1$. První formule je instancí P1, druhá aplikací MP na ξ_1 a první formuli. Máme tedy důkaz $\psi \to \xi_1$ v T. Je-li ξ_1 formule ψ, platí $T \vdash \psi \to \psi$ podle příkladu 33 a poznámky 62.
- *Indukční krok:* Je-li formule ξ_j instancí axiómu nebo prvek $T \cup \{\psi\}$, postupujeme stejně jako výše (místo ξ_1 použijeme ξ_j).

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Věta o dedukci. (2)

- Je-li ξ_j výsledkem aplikace MP na ξ_m, ξ_n, kde $1 \leq m, n < j$, je ξ_n tvaru $\xi_m \to \xi_j$. Podle I.P. navíc platí $T \vdash \psi \to \xi_m$ a $T \vdash \psi \to (\xi_m \to \xi_j)$. Důkazy $\psi \to \xi_m$ a $\psi \to (\xi_m \to \xi_j)$ v T nyní zřetězíme za sebe a připojíme následující formule:
  - $(\psi \to (\xi_m \to \xi_j)) \to ((\psi \to \xi_m) \to (\psi \to \xi_j))$
  - $(\psi \to \xi_m) \to (\psi \to \xi_j)$
  - $\psi \to \xi_j$

  První formule je instancí P2, další dvě vzniknou aplikací MP. Máme tedy důkaz formule $\psi \to \xi_j$ v T.
- Je-li ξ_j výsledkem aplikace GEN na ξ_m, kde $1 \leq m < j$, je ξ_j tvaru $\forall x\, \xi_m$. Podle I.P. platí $T \vdash \psi \to \xi_m$. K tomuto důkazu nyní stačí připojit formule
  - $\forall x\, (\psi \to \xi_m)$
  - $\forall x\, (\psi \to \xi_m) \to (\psi \to \forall x\, \xi_m)$
  - $\psi \to \forall x\, \xi_m$.

  První vznikne aplikací GEN, druhá je instancí P5, třetí vznikne aplikací MP. Dostaneme tak důkaz formule $\psi \to \xi_j$ v T. □

Predikátová logika. Kvantifikace.

Lema 65

Pro každé formule φ a ψ platí:

1. $\vdash (\forall x\,(\varphi \rightarrow \psi)) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\,\psi)$, *pokud x není volná ve formuli φ;*
2. $\vdash (\forall x\,(\varphi \rightarrow \psi)) \leftrightarrow (\exists x\,\varphi \rightarrow \psi)$, *pokud x není volná ve formuli ψ;*
3. $\vdash (\exists x\,(\varphi \rightarrow \psi)) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \exists x\,\psi)$, *pokud x není volná ve formuli φ;*
4. $\vdash (\exists x\,(\varphi \rightarrow \psi)) \leftrightarrow (\forall x\,\varphi \rightarrow \psi)$, *pokud x není volná ve formuli ψ.*

Důkaz. Pozorování:

(a) Jestliže $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ a současně $\vdash \psi \rightarrow \varphi$, pak $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. To plyne z toho, že $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$ je výroková tautologie (viz *poznámka 62*).

(b) (tranzitivita implikace). Jestliže $T \vdash \varphi \rightarrow \xi$ a současně $T \vdash \xi \rightarrow \psi$, pak $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Stačí použít *poznámku 62* a tautologii $(A \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B))$.

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Kvantifikace. (2)

(c) Nechť $\varphi(x)$, $\psi(x)$ jsou formule. Pak $\vdash \forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \forall x\,(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$, neboť

1)	$\vdash \forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	P4
2)	$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	výr. tautologie
3)	$\vdash \forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	tranz. impl. na 1), 2)
4)	$\forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	věta o dedukci
5)	$\forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \forall x\,(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	GEN
6)	$\vdash \forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \forall x\,(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	věta o dedukci

Predikátová logika. Kvantifikace. (3)

Tvrzení 1.–4. teď dokážeme za předpokladu, že $\varphi(x)$ a $\psi(x)$. Obecná podoba vyplyne užitím věty konstantách (viz dále).

1. Platí $\vdash (\forall x\,(\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \forall x\,\psi)$, neboť tato formule je instancí P5. Důkaz opačné implikace vypadá takto:

1)	$\vdash \forall x\,\psi \to \psi$	*P4*
2)	$\vdash (\forall x\,\psi \to \psi) \to ((\varphi \to \forall x\,\psi) \to (\varphi \to \psi))$	$(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$ je tautologie, viz *pozn. 62*
3)	$\vdash (\varphi \to \forall x\,\psi) \to (\varphi \to \psi)$	MP na 1), 2)
4)	$\varphi \to \forall x\,\psi \vdash \varphi \to \psi$	věta o dedukci
5)	$\varphi \to \forall x\,\psi \vdash \forall x\,(\varphi \to \psi)$	*GEN*
6)	$\vdash (\varphi \to \forall x\,\psi) \to (\forall x\,(\varphi \to \psi))$	věta o dedukci

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Kvantifikace. (4)

2. Nejprve ukážeme, že $\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\exists x\,\varphi \to \psi)$.

1)	$\vdash \forall x\,(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\neg\psi \to \forall x\,\neg\varphi)$	podle 1.
2)	$\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to \forall x\,(\neg\psi \to \neg\varphi)$	podle (c)
3)	$\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi)) \to (\neg\psi \to \forall x\,\neg\varphi)$	tranz. impl. na 2), 1)
4)	$\vdash (\neg\psi \to \forall x\,\neg\varphi) \to (\neg\forall x\,\neg\varphi \to \psi)$	taut. $(\neg B \to A) \to (\neg A \to B)$
5)	$\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\neg\forall x\,\neg\varphi \to \psi)$	tranz. impl. na 3), 4)
6)	$\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\exists x\,\varphi \to \psi)$	reformulace

Nyní opačný směr $\vdash (\exists x\,\varphi \to \psi) \to \forall x\,(\varphi \to \psi)$:

1)	$\vdash (\neg\psi \to \forall x\,\neg\varphi) \to \forall x\,(\neg\psi \to \neg\varphi)$	podle 1.
2)	$\vdash (\neg\forall x\,\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \forall x\,\neg\varphi)$	taut. $(\neg B \to A) \to (\neg A \to B)$
3)	$\vdash (\neg\forall x\,\neg\varphi \to \psi) \to \forall x\,(\neg\psi \to \neg\varphi)$	tranz. impl. na 1), 2)
4)	$\exists x\,\varphi \to \psi \vdash \forall x\,(\neg\psi \to \neg\varphi)$	věta o dedukci
5)	$\exists x\,\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	P4 a MP
6)	$\exists x\,\varphi \to \psi \vdash \varphi \to \psi$	$(\neg A \to \neg B) \to (A \to B)$ a MP
7)	$\exists x\,\varphi \to \psi \vdash \forall x\,(\varphi \to \psi)$	GEN
8)	$\vdash (\exists x\,\varphi \to \psi) \to \forall x\,(\varphi \to \psi)$	věta o dedukci

$\square$

Predikátová logika. Věta o korektnosti.

Věta 66

Nechť T je teorie a φ formule jazyka teorie T. Jestliže $T \vdash \varphi$, pak $T \models \varphi$.

Důkaz. Stačí ověřit následující tvrzení:

- Je-li ψ instancí jednoho ze schémat P1–P5 (příp. také R1–R3, pokud jazyk teorie T je jazyk s rovností) a $\mathcal{M}$ je model T, pak $\mathcal{M} \models \psi$.
- Je-li $\mathcal{M}$ model T a ψ, ξ formule jazyka teorie T, kde $\mathcal{M} \models \psi$ a $\mathcal{M} \models \psi \rightarrow \xi$, pak $\mathcal{M} \models \xi$.
- Je-li $\mathcal{M}$ model T a ψ formule jazyka teorie T, kde $\mathcal{M} \models \psi$, pak $\mathcal{M} \models \forall x\, \psi$.

Metaindukcí vzhledem k i je pak již triviální ukázat, že je-li $\psi_1, \cdots, \psi_k$ důkaz formule φ v T a $\mathcal{M}$ je model T, pak $T \models \psi_i$ pro každé $1 \leq i \leq k$. □

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Úplnost (úvod).

Lema 67

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *Pro každou teorii T a pro každou formuli φ jazyka teorie T platí, že jestliže $T \models \varphi$, pak $T \vdash \varphi$.*
2. *Každá bezesporná teorie má model.*

Důkaz.

(1. $\Rightarrow$ 2.) Buď T bezesporná teorie. Pak existuje formule φ jazyka teorie T, která není v T dokazatelná (tj. $T \nvdash \varphi$). Obměnou 1. pak ale dostáváme, že φ není sémantickým důsledkem T (tj. $T \not\models \varphi$). To znamená, že existuje takový model T, kde není pravdivá φ. Zejména má tedy T model.

Predikátová logika. Úplnost (úvod). (2)

(2. $\Rightarrow$ 1.) Užitím 2. dokážeme obměnu 1. Nechť tedy $T \nvdash \varphi$, a nechť $\overline{\varphi}$ je univerzální uzávěr φ. Ukážeme, že $T \cup \{\neg\overline{\varphi}\}$ je bezesporná; pak podle 2. má $T \cup \{\neg\overline{\varphi}\}$ model, tedy $T \not\models \varphi$.

$T \cup \{\neg\overline{\varphi}\}$ je bezesporná: Předpokládejme naopak, že $T \cup \{\neg\overline{\varphi}\}$ je sporná. Pak

1)	$T \cup \{\neg\overline{\varphi}\} \vdash \overline{\varphi}$	$T \cup \{\neg\overline{\varphi}\}$ je sporná
2)	$T \vdash \neg\overline{\varphi} \rightarrow \overline{\varphi}$	věta o dedukci
3)	$\vdash (\neg\overline{\varphi} \rightarrow \overline{\varphi}) \rightarrow \overline{\varphi}$	$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ je tautologie, viz *pozn. 62*
4)	$T \vdash \overline{\varphi}$	MP na 2), 3)
5)	$T \vdash \varphi$	opakovaně P4 a MP

Obdrželi jsme tedy spor s tím, že $T \nvdash \varphi$.

$\square$

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Úplnost (úvod). (3)

Cílem dalšího postupu je dokázat, že každá bezesporná teorie má model. Tato konstrukce obsahuje dva základní obraty:

- Zavede se pojem *kanonické struktury* pro danou teorii T. Tato struktura obecně *není* modelem T. Ukážeme, že pokud T vyhovuje dalším podmínkám (je *henkinovská* a *úplná*), pak kanonická struktura *je* modelem T.
- Ukážeme, že každou bezespornou teorii je možné vhodným způsobem *rozšířit* tak, aby byla henkinovská a úplná.

Predikátová logika. Rozšíření teorie.

Definice 68

- *Teorie S je rozšíření teorie T, jestliže jazyk teorie S obsahuje jazyk teorie T a v teorii S jsou dokazatelné všechny axiómy teorie T.*
- *Rozšíření S teorie T se nazývá konzervativní, jestliže každá formule jazyka teorie T, která je dokazatelná v S, je dokazatelná i v T.*
- *Teorie S a T jsou ekvivalentní, jestliže S je rozšířením T a současně T je rozšířením S.*

Příklad 69

- Teorie komutativních grup je nekonzervativní rozšíření teorie grup.
- Teorie grup je nekonzervativní rozšíření teorie monoidů (tvrzení $\forall x\, \exists y\ x \cdot y = 1$ nelze dokázat v teorii monoidů).
- Gödel-Bernaysova teorie tříd je konzervativním rozšířením Zermelo-Fraenkelovy teorie množin.

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Věta o konstantách.

Věta 70 (o konstantách)

Nechť S je rozšíření T vzniklé obohacením jazyka teorie T o nové navzájem různé konstanty $c_1, \cdots, c_k$ (nové axiómy nepřidáváme), a nechť $x_1, \cdots, x_k$ jsou navzájem různé proměnné. Pak pro každou formuli φ jazyka teorie T platí, že $T \vdash \varphi$ právě když $S \vdash \varphi(x_1/c_1, \cdots, x_k/c_k)$.

Důkaz. Jelikož $c_1, \cdots, c_k$ jsou navzájem různé, stačí dokázat, že $T \vdash \varphi$ právě když $S \vdash \varphi(x/c)$.

$\Rightarrow$: K důkazu φ v T připojíme formule $\forall x\, \varphi$, $\forall x\, \varphi \rightarrow \varphi(x/c)$, $\varphi(x/c)$ a obdržíme tak důkaz formule $\varphi(x/c)$ v S.

$\Leftarrow$: Nechť $\psi_1, \cdots, \psi_k$ je důkaz $\varphi(x/c)$ v S. Nechť y je proměnná, která se nevyskytuje v tomto důkazu. Indukcí k i ukážeme, že pro každé $1 \le i \le k$ je $\psi_1(c/y), \cdots, \psi_i(c/y)$ důkaz v T. Rozlišíme tyto možnosti:

- Je-li ψ_i instancí P1–P5 (příp. R1–R3), je také $\psi_i(c/y)$ instancí téhož schématu.
- Je-li ψ_i axióm teorie T, pak se v ψ_i nevyskytuje c a formule ψ_i a $\psi_i(c/y)$ jsou tedy totožné.

Predikátová logika. Věta o konstantách. (2)

- Jestliže ψ_i vyplývá z ψ_j a ψ_m pomocí MP, je ψ_m tvaru $\psi_j \to \psi_i$ a formule $\psi_m(c/y)$ je tedy formulí $\psi_j(c/y) \to \psi_i(c/y)$. Takže formule $\psi_i(c/y)$ vyplývá z $\psi_j(c/y)$ a $\psi_m(c/y)$ pomocí MP.
- Jestliže ψ_i vyplývá z ψ_j pomocí GEN, je ψ_i tvaru $\forall x\, \psi_j$. Stačí si uvědomit, že $(\forall x\, \psi_j)(c/y)$ je tatáž formule jako $\forall x\, (\psi_j(c/y))$, neboť x a y jsou různé.

Ukázali jsme, že $T \vdash \varphi(x/c)(c/y)$. Dále

1)	$T \vdash \varphi(x/y)$	$\varphi(x/y)$ je totéž co $\varphi(x/c)(c/y)$
2)	$T \vdash \forall y\, \varphi(x/y)$	GEN
3)	$\vdash \forall y\, \varphi(x/y) \to (\varphi(x/y)(y/x))$	$P4$
4)	$T \vdash \varphi(x/y)(y/x)$	MP na 2), 3)
5)	$T \vdash \varphi$	$\varphi(x/y)(y/x)$ je totéž co φ

□

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Henkinovské teorie.

Definice 71

- *Teorie T je henkinovská, jestliže pro každou formuli φ jazyka teorie T s jednou volnou proměnnou x existuje v jazyce teorie T konstanta c taková, že $T \vdash \exists x\, \varphi \to \varphi(x/c)$.*
- *Teorie T je úplná, jestliže je bezesporná a pro každou uzavřenou formuli φ jejího jazyka platí buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$.*

Predikátová logika. Henkinovské teorie. (2)

Věta 72 (o henkinovské konstantě)

Buď T teorie a $\varphi(x)$ formule jejího jazyka. Je-li S rozšíření T, které vznikne přidáním nové konstanty c_φ a formule $\exists x\,\varphi \rightarrow \varphi(x/c_\varphi)$, pak S je konzervativní rozšíření T.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že pro libovolnou formuli $\xi(x)$ platí $\vdash \exists x\xi \rightarrow \exists y\xi(x/y)$:

1)	$\{\forall y \neg\xi(x/y)\} \vdash \forall y \neg\xi(x/y)$	
2)	$\{\forall y \neg\xi(x/y)\} \vdash \neg\xi(x/y)(y/x)$	P4 a MP
3)	$\{\forall y \neg\xi(x/y)\} \vdash \neg\xi$	přepis
4)	$\{\forall y \neg\xi(x/y)\} \vdash \forall x \neg\xi$	GEN
5)	$\vdash \forall y \neg\xi(x/y) \rightarrow \forall x \neg\xi$	dedukce
6)	$\vdash \exists x\xi \rightarrow \exists y\xi(x/y)$	taut. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ a MP.

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Henkinovské teorie. (3)

Nechť R značí teorii vzniklou pouhým přidáním konstanty c_φ k T. Nechť ψ je formule jazyka teorie T taková, že $S \vdash \psi$. Nechť y je proměnná, která se nevyskytuje ani ve φ, ani v ψ. Platí:

1)	$S \vdash \psi$	předpoklad
2)	$R \vdash (\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/c_\varphi)) \rightarrow \psi$	$S = R \cup \{\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/c_\varphi)\}$ a dedukce
3)	$T \vdash (\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/y)) \rightarrow \psi$	věta o konstantách
4)	$T \vdash \forall y((\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/y)) \rightarrow \psi)$	GEN
5)	$T \vdash \exists y(\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/y)) \rightarrow \psi$	*lema 65 (2)* a MP
6)	$\vdash (\exists x\varphi \rightarrow \exists y\varphi(x/y)) \rightarrow \exists y(\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/y))$	*lema 65 (3)*
7)	$T \vdash (\exists x\varphi \rightarrow \exists y\varphi(x/y)) \rightarrow \psi$	tranz. implikace
8)	$\vdash \exists x\varphi \rightarrow \exists y\varphi(x/y)$	dokázáno výše
9)	$T \vdash \psi$	MP

□

Predikátová logika. Henkinovské teorie. (4)

Věta 73 (o henkinovském rozšíření)

Ke každé teorii existuje henkinovská teorie, která je jejím konzervativním rozšířením.

Důkaz. Buď T teorie. Pro každé $n \geq 0$ definujeme teorii T_n takto:

- $T_0 = T$. Teorie T_{i+1} vznikne z T_i tak, že pro každou formuli $\varphi(x)$ jazyka teorie T_i přidáme novou konstantu c_φ a formuli $\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/c_\varphi)$.

Metaindukcí vzhledem k n ukážeme, že T_n je konzervativní rozšíření T.

- Pro $n = 0$ není co dokazovat. V indukčním kroku si stačí uvědomit, že je-li $T_{i+1} \vdash \psi$, může být v důkazu formule ψ použito jen *konečně mnoho* axiómů $\xi_1, \cdots, \xi_k$, které nepatří do T_i. Užitím věty o henkinovské konstantě k-krát po sobě dostáváme $T_i \vdash \psi$, proto $T \vdash \psi$ podle I.P.

Uvažme teorii $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$. Teorie S je konzervativní rozšíření T, neboť každý důkaz v S používá jen konečně mnoho axiómů a je tedy důkazem v nějaké T_m. Teorie S je zjevně henkinovská. □

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Henkinovské teorie. (5)

V následující větě využíváme *Zornovo lema*, které říká následující:

> *Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina. Jestliže pro každý spočetný řetěz $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \cdots$ existuje v A horní závora, pak $(A, \leq)$ má maximální prvek.*

Zornovo lema je ekvivalentní s *axiomem výběru*.

Predikátová logika. Henkinovské teorie. (6)

Věta 74 (o zúplňování teorií)

Ke každé bezesporné teorii existuje její rozšíření se stejným jazykem, které je úplnou teorií.

Důkaz. Uvažme uspořádanou množinu $(\mathcal{T}, \subseteq)$, kde $\mathcal{T}$ je soubor všech bezesporných teorií obsahujících T. Každý spočetný řetězec $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \cdots$ má v $(\mathcal{T}, \subseteq)$ horní závoru $\bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$. Zde je třeba ověřit, že $\bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$ je skutečně bezesporná teorie (a tedy prvek $\mathcal{T}$): pokud by tato teorie byla sporná, existuje v ní důkaz kontradikce. Tento důkaz ale používá jen *konečně mnoho* axiómů, proto je důkazem i v nějaké T_i, tedy T_i je sporná, spor.

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Henkinovské teorie. (7)

Podle Zornova lematu tedy existuje *maximální* bezesporná teorie $\mathcal{U}$ obsahující T. Dokážeme, že $\mathcal{U}$ je úplná. Pokud není, existuje uzavřená formula φ taková, že $\mathcal{U} \nvdash \varphi$ a současně $\mathcal{U} \nvdash \neg\varphi$. Zejména tedy $\varphi, \neg\varphi \notin \mathcal{U}$. Z maximality $\mathcal{U}$ plyne, že teorie $\mathcal{U} \cup \{\varphi\}$ i $\mathcal{U} \cup \{\neg\varphi\}$ jsou sporné, platí tedy $\mathcal{U} \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ a $\mathcal{U} \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$. Proto také $\mathcal{U} \vdash \varphi \rightarrow \neg\varphi$ a $\mathcal{U} \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$ (užitím věty o dedukci). Z toho dostáváme $\mathcal{U} \vdash \psi \wedge \neg\psi$ pro libovolné ψ, neboť $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi))$ je výroková tautologie (použijeme 2x MP). Tedy $\mathcal{U}$ je sporná, spor.

Pokud je jazyk teorie T konečný nebo spočetný, lze se použití Zornova lematu snadno vyhnout. Dokazovaná věta pak žádnou formu axiómu výběru nevyužívá. $\square$

Predikátová logika. Kanonická struktura.

Definice 75

Buď T teorie, kde jazyk teorie T obsahuje alespoň jednu konstantu. Kanonická struktura teorie T je realizace $\mathcal{M}$ jazyka teorie T, kde

- *univerzum M je tvořeno všemi uzavřenými termy jazyka teorie T;*
- *relizace funkčního symbolu f arity n je funkce f_M, která uzavřeným termům $t_1, \cdots, t_n$ přiřadí uzavřený term $f(t_1, \cdots, t_n)$;*
- *realizace predikátového symbolu P arity m je predikát P_M definovaný takto: $P_M(t_1, \cdots, t_m)$ platí právě když $T \vdash P(t_1, \cdots, t_m)$.*

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Kanonická struktura. (2)

Věta 76 (o kanonické struktuře)

Nechť T je úplná henkinovská teorie, a nechť jazyk teorie T je jazykem bez rovnosti. Pak kanonická struktura teorie T je modelem T.

Důkaz. Nechť $\mathcal{M}$ je kanonická struktura teorie T. Ukážeme, že pro libovolnou formuli φ jazyka teorie T platí následující:

- Jestliže $\hat{\varphi}$ je uzavřená instance formule φ, pak $T \vdash \hat{\varphi}$ právě když $\mathcal{M} \models \hat{\varphi}$.

Jelikož lze (bez újmy na obecnosti) předpokládat, že prvky T jsou *uzavřené* formule, plyne z výše uvedeného, že $\mathcal{M}$ je model T.

Indukcí ke struktuře φ:

- $\varphi \equiv P(t_1, \cdots, t_n)$. Buď $P(t'_1, \cdots, t'_n)$ libovolná uzavřená instance. Podle definice kanonické struktury $\mathcal{M} \models P(t'_1, \cdots, t'_n)$ právě když $T \vdash P(t'_1, \cdots, t'_n)$.

Predikátová logika. Kanonická struktura. (3)

- $\varphi \equiv \neg\psi$. Buď $\neg\hat{\psi}$ libovolná uzavřená instance. Jelikož $\hat{\psi}$ je uzavřená instance ψ, podle IP platí $T \vdash \hat{\psi}$ právě když $\mathcal{M} \models \hat{\psi}$. Dále $T \vdash \neg\hat{\psi}$ právě když $T \nvdash \hat{\psi}$ (T je bezesporná) právě když $\mathcal{M} \not\models \hat{\psi}$ (IP) právě když $\mathcal{M} \models \neg\hat{\psi}$.
- $\varphi \equiv \psi \to \xi$. Každá uzavřená instance této formule je tvaru $\hat{\psi} \to \hat{\xi}$, kde $\hat{\psi}$ je uzavřená instance ψ a $\hat{\xi}$ je uzavřená instance ξ.
  - Nechť $T \vdash \hat{\psi} \to \hat{\xi}$. Jelikož $\hat{\psi}$ je uzavřená formule a T je uplná, platí buď $T \vdash \hat{\psi}$ nebo $T \vdash \neg\hat{\psi}$. V prvém případě dále $T \vdash \hat{\xi}$ (MP) a užitím IP celkem dostáváme $\mathcal{M} \models \hat{\psi}$ a $\mathcal{M} \models \hat{\xi}$. Proto také $\mathcal{M} \models \hat{\psi} \to \hat{\xi}$. V druhém případě $T \nvdash \hat{\psi}$ (T je bezesporná), proto $\mathcal{M} \not\models \hat{\psi}$ (IP), tudíž $\mathcal{M} \models \hat{\psi} \to \hat{\xi}$.
  - Nechť $\mathcal{M} \models \hat{\psi} \to \hat{\xi}$. Pak buď $\mathcal{M} \not\models \hat{\psi}$ nebo $\mathcal{M} \models \hat{\xi}$. V prvém případě $T \nvdash \hat{\psi}$ podle IP, tudíž $T \vdash \neg\hat{\psi}$ neboť T je úplná. Proto $T \vdash \hat{\psi} \to \hat{\xi}$ užitím tautologie $\neg A \to (A \to B)$ a MP. V druhém případě $T \vdash \hat{\xi}$, proto $T \vdash \hat{\psi} \to \hat{\xi}$ užitím tautologie $A \to (B \to A)$ a MP.

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod

Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy

Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému

Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost

Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti

Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Kanonická struktura. (4)

- $\varphi \equiv \forall x\, \psi$. Buď $\forall x\, \bar{\psi}$ libovolná uzavřená instance. Pak $\bar{\psi}(x)$, jinak by $\forall x\, \bar{\psi}$ nebyla uzavřená.
  - Nechť $T \vdash \forall x\, \bar{\psi}$. Pak pro libovolný uzavřený term t platí $T \vdash \bar{\psi}(x/t)$ (P4 a MP). Podle IP $\mathcal{M} \models \bar{\psi}(x/t)$. Jelikož tento argument funguje pro *libovolný* uzavřený term t, platí také $\mathcal{M} \models \forall x\, \bar{\psi}$.
  - Nechť $T \nvdash \forall x\, \bar{\psi}$. Pak také $T \nvdash \forall x \neg\neg\bar{\psi}$ (kdyby $T \vdash \forall x \neg\neg\bar{\psi}$, dostaneme dále $T \vdash \neg\neg\bar{\psi}$ (P4 a MP) a $T \vdash \bar{\psi}$ (tautologie $\neg\neg A \to A$ a MP), $T \vdash \forall x\, \bar{\psi}$ (GEN), spor).
    Jelikož $T \nvdash \forall x \neg\neg\bar{\psi}$, platí $T \vdash \neg\forall x \neg\neg\bar{\psi}$ neboť T je úplná. Tedy $T \vdash \exists x \neg\bar{\psi}$. Jelikož T je henkinovská, platí $T \vdash \exists x \neg\bar{\psi} \to \neg\bar{\psi}(x/c)$. Tedy $T \vdash \neg\bar{\psi}(x/c)$ a proto $T \nvdash \bar{\psi}(x/c)$ neboť T je bezesporná. Podle IP $\mathcal{M} \not\models \bar{\psi}(x/c)$, tedy $\mathcal{M} \models \neg\bar{\psi}(x/c)$. Proto $\mathcal{M} \not\models \forall x \bar{\psi}$.

□

Predikátová logika. Kanonická struktura. (5)

Věta 77

Nechť T je úplná henkinovské teorie, a nechť jazyk teorie T je jazykem s rovností. Pak T má model.

Důkaz. Buď S teorie (s jazykem bez rovnosti), která vznikne rozšířením T o nový binární predikátový symbol $=$ a axiomy R1–R3. Symbol $=$ v teorii S je tedy *mimologický* a může být realizován „jakkoliv“. Axiomy R1–R3 jsou v S „normální“ axiómy. Stačí nám ukázat, že S má takový model, kde $=$ je realizován jako identita. Takový model pak jistě bude i modelem T (kde $=$ je chápáno jako logický symbol).

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Kanonická struktura. (6)

Buď $\mathcal{M}$ kanonická struktura teorie S, a nechť $\sim$ je realizace $=$ v S (tj. $t_1 \sim t_2$ právě když $S \vdash t_1 = t_2$). Dokážeme, že $\sim$ je nutně ekvivalence:

- reflexivita: $S \vdash x{=}x$ (R1), $S \vdash \forall x\, x{=}x$ (GEN), $S \vdash \forall x\, x{=}x \rightarrow t{=}t$ (P4), $S \vdash t{=}t$ (MP). Tedy $t \sim t$.
- symetrie: nechť $s \sim t$, tj. $S \vdash s{=}t$. Platí $S \vdash (x_1{=}y_1 \wedge x_2{=}y_2) \rightarrow (x_1{=}x_2 \rightarrow y_1{=}y_2)$ (R2, $=$ hraje i roli P). Užitím GEN, P4 a MP dostaneme $S \vdash (s{=}t \wedge s{=}s) \rightarrow (s{=}s \rightarrow t{=}s)$. Užitím MP dostaneme $S \vdash t{=}s$.
- Tranzitivita: podobně.

Predikátová logika. Kanonická struktura. (7)

Nyní již můžeme definovat strukturu $\mathcal{O}$ pro jazyk teorie S:

- Nosičem $\mathcal{O}$ jsou třídy rozkladu nosiče $\mathcal{M}$ podle $\sim$.
- Funkční symbol f arity n je realizován takto:

$$f_{\mathcal{O}}([t_1],\cdots,[t_n]) = [f_{\mathcal{M}}(t_1,\cdots,t_n)]$$

- Predikátový symbol P arity m je realizován takto:

$$P_{\mathcal{O}}([t_1],\cdots,[t_m]) \text{ právě když } P_{\mathcal{M}}(t_1,\cdots,t_m)$$

Korektnost této definice (tj. nezávislost na volbě reprezentantů) se dokáže pomocí R1–R3 podobným stylem jako výše. Snadno se ověří, že realizací uzavřeného termu t ve struktuře $\mathcal{O}$ je $[s]$ právě když $S \vdash s{=}t$. To znamená, že predikátový symbol $=$ je v $\mathcal{O}$ realizován jako identita.

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Kanonická struktura. (8)

Zbývá ukázat, že $\mathcal{O}$ je modelem S. Podobně jako ve *větě 76* budeme chtít prokázat, že pro libovolnou formuli $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ jazyka teorie S platí:

- Jestliže $t_1,\cdots,t_n$ jsou uzavřené termy jazyka teorie S, pak $T \vdash \varphi(x_1/t_1,\cdots,x_n/t_n)$ právě když $\mathcal{O} \models \varphi(x_1/[t_1],\cdots,x_n/[t_n])$.

Jelikož S je henkinovská a úplná, platí podle *věty 76*

- $T \vdash \varphi(x_1/t_1,\cdots,x_n/t_n)$ právě když $\mathcal{M} \models \varphi(x_1/t_1,\cdots,x_n/t_n)$

Stačí tedy ukázat, že

- $\mathcal{M} \models \varphi(x_1/t_1,\cdots,x_n/t_n)$ právě když $\mathcal{O} \models \varphi(x_1/[t_1],\cdots,x_n/[t_n])$

To lze lehce provést indukcí ke struktuře φ. □

Predikátová logika. Věta o úplnosti.

Kurt Gödel (1906–1978)

Věta 78 (o úplnosti, Kurt Gödel)

Každá bezesporná teorie má model. Pro každou teorii T a každou formuli jejího jazyka tedy platí, že jestliže $T \models \varphi$, pak $T \vdash \varphi$.

Důkaz. Jde o jednoduchý důsledek předchozích vět. □

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod

Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy

Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému

Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost

Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti

Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Věta o kompaktnosti.

Věta 79

Teorie T má model, právě když každá její podteorie s konečně mnoha axiómy (a s minimálním jazykem, v němž jsou tyto axiómy formulovatelné) má model.

Důkaz. Směr „$\Rightarrow$“ je triviální. Pro opačnou implikaci stačí ukázat, že T je bezesporná (pak T má model podle věty o úplnosti). Kdyby T byla sporná, existoval by důkaz formule $\psi \wedge \neg\psi$ v T. Tento důkaz je konečný, využívá tedy jen konečně mnoho axiómů T, které tvoří spornou podteorii T, spor. □

Predikátová logika. Löwenheimova-Skolemova věta.

Poznámka 80

Z důkazu *věty 73* plyne, že každá bezesporná teorie *s jazykem bez rovnosti* má model kardinality $\max\{|\mathcal{L}|, \aleph_0\}$ (při rozšíření teorie na henkinovskou bylo přidáno $|\mathcal{L}| \cdot \aleph_0$ nových konstant). Toto pozorování *neplatí* pro teorie s jazykem s rovností (např. pro $T = \{\forall x\, x{=}c\}$). Nicméně lze dokázat následující:

Věta 81

Nechť T je teorie a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje model teorie T jehož nosič má mohutnost alespoň n. Pak T má nekonečný model.

Důkaz. Je-li jazyk teorie T jazykem bez rovnosti, plyne tvrzení ihned z *poznámky 80*. Jinak pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme formuli $\varphi_n \equiv \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y\; x_1{\neq}y \wedge \cdots \wedge x_n{\neq}y$ a teorii $S_n = T \cup \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$. Podle předpokladu věty má každá S_n model. Podle věty o kompaktnosti má proto model i teorie $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_n$. Tento model je nutně nekonečný a je i modelem teorie T. □

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Predikátová logika. Löwenheimova-Skolemova věta. (2)

Věta 82 (Löwenheimova-Skolemova)

Nechť T je teorie s jazykem L, která má nekonečný model. Nechť κ je nekonečný kardinál takový, že $\kappa \geq |\mathcal{L}|$. Pak T má model mohutnosti κ.

Důkaz. Nechť $\mathcal{M}$ je nekonečný model T. Jazyk $\mathcal{L}$ rozšíříme o systém $\{c_i \mid i < \kappa\}$ nových konstant a k T přidáme axiómy $\{c_i \neq c_j \mid i, j < \kappa\}$. Obdržíme tak teorii T'. Nechť K je konečná část T', a nechť $c_1, \cdots, c_n$ jsou všechny nově přidané konstanty, které se vyskytují ve formulích teorie K (takových konstant je jen konečně mnoho). Pokud tyto konstanty realizujeme navzájem různými prvky nosiče $\mathcal{M}$, obdržíme model teorie K. Každá konečná část T' je tedy splnitelná. Podle věty o kompaktnosti má tedy model i teorie T'. Nosič tohoto model ale nutně obsahuje alespoň κ navzájem různých individuí. □

Věta o neúplnosti. Úvod.

- *Jazyk aritmetiky* je jazyk s rovností obsahující konstantu 0, unární funkční symbol S a dva binární funkční symboly $*$ a $+$.
- Význačnou realizací jazyka aritmetiky je $(\mathbb{N}_0, *, +)$, kde univerzem je soubor všech nezáporných celých čísel, 0 je realizováno jako nula, S jako funkce následníka, $*$ jako násobení, $+$ jako sčítání. (Relační predikáty jako $<, \leq$ lze snadno definovat.)
- Jedním ze základních kroků *Hilbertova programu* formalizace matematiky mělo být vytvoření *rekurzivní a úplné* teorie T jazyka aritmetiky.
- Slovem „úplné" se myslí, že $T \vdash \varphi$ právě když $\varphi \in Th(\mathbb{N}_0, *, +)$ (Tj. formule dokazatelné v T jsou právě formule pravdivé v $(\mathbb{N}_0, *, +)$).
- Slovo „rekurzívní" intuitivně znamená, že musí být „mechanicky ověřitelné", zda daná posloupnost symbolů je či není důkazem v T (možných formalizací tohoto pojmu je více).
- Z Gödelových výsledků plyne, že taková teorie neexistuje.

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Věta o neúplnosti. Turingův stroj.

Alan Turing (1912–1954)

- Definoval pojem Turingova stroje a s jeho pomocí ukázal, že problém pravdivosti formulí prvního řádu je *nerozhodnutelný*.
- Považován za zakladatele informatiky (jako vědy).
- Turingův stroj je matematickým modelem „hloupého odvozovače", který má k dispozici papír, tužku a gumu, a který si pamatuje konečně mnoho schémat axiómů.
- Význam Turingova stroje coby modelu reálných výpočetních zařízení se projevil až v druhé polovině 20. století.

Věta o neúplnosti. Turingův stroj. (2)

- Je-li Σ konečná *abeceda*, značí symbol Σ^* soubor všech konečných slov složených z prvků Σ (prázdné slovo značíme symbolem ε). Délku slova w značíme $len(w)$. Pro každé $1 \leq i \leq len(w)$ značí symbol $w(i)$ i-tý znak slova w (zleva). *Jazyk* nad abecedou Σ je podmnožina Σ^*.
- *Turingův stroj* je matematický model výpočetního zařízení, které je vybaveno konečně-stavovou *řídící jednotkou* („hlava odvozovače“), jednosměrně nekonečnou *pracovní páskou* („papír“), a čtecí/zápisovou hlavou („tužka/guma“).
- Na začátku výpočtu je na pásce zapsáno konečné *vstupní slovo*, hlava je na nejlevější pozici, a stavová jednotka je v počátečním stavu.
- Stroj na základě svého momentálního kontrolního stavu a symbolu pod čtecí hlavou provede „výpočetní krok“, tj. změní svůj kontrolní stav, nahradí symbol pod čtecí hlavou jiným symbolem, a posune čtecí hlavu vlevo nebo vpravo.
- Výpočet se zastaví, pokud stroj dojde do konfigurace, jejíž kontrolní stav je *akceptující* nebo *zamítající*. Pro některá slova může stroj také *nezastavit* (cyklit).
- Vstupní slovo je *akceptované*, jestliže stroj po konečně mnoha krocích dojde do akceptující konfigurace. Soubor všech vstupních slov, která stroj akceptuje, tvoří *jazyk akceptovaný daným strojem*.

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Věta o neúplnosti. Turingův stroj. (3)

Definice 83

Turingův stroj je devítice $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, \rhd, q_0, q_a, q_r, \delta)$, kde

- *Q je konečný soubor kontrolních stavů;*
- *Σ je konečná vstupní abeceda;*
- *Γ je konečná pásková abeceda (kde $\Sigma \subseteq \Gamma$ a $Q \cap \Gamma = \emptyset$);*
- *$\sqcup \in \Gamma$ je prázdný znak;*
- *$\rhd \in \Gamma$ je levý konec pásky;*
- *$q_0, q_a, q_r \in Q$ je po řadě počáteční, akceptující a zamítající stav (q_0, q_a, q_r jsou navzájem různé).*
- *$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ je přechodová funkce, kde*
  - *pro každé $p \in Q$ platí $\delta(p, \rhd) = (q, \rhd, R)$ pro nějaké $q \in Q$;*
  - *$\delta(q_a, c) = (q_a, c, R)$ pro každé $c \in \Gamma$;*
  - *$\delta(q_r, c) = (q_r, c, R)$ pro každé $c \in \Gamma$.*

Věta o neúplnosti. Turingův stroj. (4)

- *Konfigurace* stroje M je konečné slovo uqv, kde $u, v \in \Gamma^*$ a $q \in Q$.
- *Počáteční konfigurace* pro slovo $w \in \Sigma^*$ je konfigurace $q_0 \rhd w$.
- *Krok výpočtu* je binární relace $\mapsto$ na množině konfigurací definovaná takto:
  - Jestliže $\delta(q, a) = (p, b, L)$, pak $ucqav \mapsto upcbv$ pro každé $u, v \in \Gamma^*$ a $c \in \Gamma$.
  - Jestliže $\delta(q, a) = (p, b, R)$, pak $uqav \mapsto ubpv'$ pro každé $u, v \in \Gamma^*$, kde $v' = v$ pokud v je neprázdné, jinak $v' = \llcorner\!\lrcorner$.
  - $\mapsto$ obsahuje jen to, co lze odvodit pomocí předchozích dvou pravidel.
- Slovo $w \in \Sigma^*$ je *akceptované* strojem M, jestliže $q_0 \rhd w \mapsto^* uq_a v$ pro nějaké $u, v \in \Gamma^*$.
- *Jazyk* akceptovaný strojem $\mathcal{M}$, označovaný $L(\mathcal{M})$, je soubor všech $w \in \Sigma^*$, které jsou akceptované strojem $\mathcal{M}$.

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod

Aristotelova logika

Logický čtverec

Sylogismy

Booleova algebra logiky

Dva zákl. problémy

Řešení 1. problému

Řešení 2. problému

Výroková logika

Syntaxe

Sémantika

Plnohodnotnost

Kompaktnost

Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$

Korektnost

Úplnost

Predikátová logika

Syntaxe

Sémantika

Odvozovací systém

Věta o úplnosti

Věta o neúplnosti

Turingův stroj

Důkaz věty o neúplnosti

Gödelův důkaz

2. věta o neúplnosti

Věta o neúplnosti. Vlastnosti jazyků.

- Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je *rekurzivně vyčíslitelný*, jestliže $L = L(M)$ pro nějaký Turingův stroj M. Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je *rekurzivní*, jestliže $L = L(M)$ pro nějaký Turingův stroj M, který zastaví pro *každé* vstupní slovo. Jednoduché pozorování je, že jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je rekurzivní právě když L i $\overline{L}$ jsou rekurzivně vyčíslitelné (kde $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$).
- Uvažme soubor *všech* Turingových strojů se vstupní abecedou $\{0, 1\}$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že kontrolní stavy a symboly páskové abecedy *každého* takového stroje jsou prvky nějaké fixní spočetné množiny. Pak *každý* Turingův stroj M se vstupní abecedou $\{0, 1\}$ lze jednoznačně zapsat jako slovo $code(M) \in \{0, 1\}^*$. Navíc lze předpokládat, že *každé* $u \in \{0, 1\}^*$ je kódem nějakého stroje M_u se vstupní abecedou $\{0, 1\}$.
- Uvažme jazyk $Accept = \{u \in \{0, 1\}^* \mid M_u \text{ akceptuje } u\}$.
- Lze snadno (i když technicky) dokázat, že $Accept$ je rekurzívně vyčíslitelný (lze zkonstruovat stroj U, který pro dané vstupní slovo $u \in \{0, 1\}^*$ „simuluje“ výpočet stroje M_u na slově u).
- Ukážeme, že $\overline{Accept}$ *není rekurzívní*. Podle jednoho z předchozích bodů pak jazyk $\overline{Accept}$ *není rekurzivně vyčíslitelný*.

Věta o neúplnosti. Jazyk *Accept*.

Věta 84

Jazyk Accept není rekuzivní.

Důkaz. Předpokládejme, že *Accept* je rekurzivní. Pak také $\overline{Accept}$ je rekurzivní, tj. existuje Turingův stroj M se vstupní abecedou $\{0, 1\}$, který zastaví pro každé vstupní slovo a $L(M) = \overline{Accept}$. Nechť $v = code(M)$. Platí $v \in L(M)$?

- Ano. Pak $v \notin L(M_v) = L(M)$, spor.
- Ne. Pak $v \in L(M_v) = L(M)$, spor.

Z předpokladu existence stroje M se nám podařilo odvodit spor. Stroj M tedy *neexistuje*. □

Poznámka 85

V důkazu předchozí věty se objevuje určitá forma *autoreference* (stroj M zkoumá „sám sebe“ tak, že analyzuje svůj vlastní kód). Každý známý důkaz věty o neúplnosti se o nějakou formu autoreference opírá.

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Věta o neúplnosti. Peanova aritmetika.

Jedním z pokusů o vytvoření rekurzivní a úplné teorie aritmetiky byl následující systém nazývaný *Peanova aritmetika* (seznam Peanových axiómů bývá v literatuře uváděn v různých podobách):

- $\forall x\ S(x) \neq 0$
- $\forall x \forall y\ S(x){=}S(y) \rightarrow x{=}y$
- $\forall x\ x{+}0 = x$
- $\forall x \forall y\ x{+}S(y) = S(x{+}y)$
- $\forall x\ x{*}0 = 0$
- $\forall x \forall y\ x{*}S(y) = (x{*}y) + x$
- $(\varphi(0) \wedge \forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x)))) \rightarrow \forall x\, \varphi(x)$, kde φ je formule s jednou volnou proměnnou x.

Věta o neúplnosti. Peanova aritmetika. (2)

- Každou formuli jazyka aritmetiky je možné zapsat jako slovo nad abecedou $\{v, +, *, 0, S, (,), \forall, \rightarrow, \neg, =, \#\}$. Různé proměnné zapisujeme jako řetězce složené z v různé délky (např. místo x, y, z můžeme psát v, vv, vvv apod.).
- Podobně můžeme i každou *konečnou* posloupnost formulí zapsat jako slovo nad výše uvedenou abecedou, kde symbol $\#$ použijeme pro oddělení jednotlivých formulí.

Definice 86

Teorie T jazyka aritmetiky je rekurzivní, jestliže jazyk tvořený zápisy všech důkazů v T je rekurzivní.

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Věta o neúplnosti. Peanova aritmetika. (3)

Lze snadno (i když technicky) dokázat, že např. Peanovy axiómy tvoří rekurzivní teorii. Definici rekurzivity teorie lze samozřejmě rozšířit i na teorie nad jinými jazyky. Rekurzivní teorie odpovídají (na intuitivní úrovni) právě teoriím, které umožňují „mechanické odvozování“. Triviální pozorování o rekurzivních teoriích podává následující věta.

Věta 87

Nechť T je rekurzivní teorie jazyka aritmetiky. Pak jazyk tvořený všemi formulemi dokazatelnými v T je rekurzivně vyčíslitelný.

Věta o neúplnosti. Jazyk *Valid*.

- Nechť *Valid* resp. *Provable* jsou jazyky nad abecedou $\{v,+,*,0,S,(,),\forall,\to,\neg,=\}$ obsahující zápisy všech formulí jazyka Peanovy aritmetiky, které jsou *pravdivé* v realizaci $(\mathbb{N}_0,*,+)$ resp. *dokazatelné* ze systému axiomů Peanovy aritmetiky.
- Zjevně *Provable* $\subseteq$ *Valid*, neboť Peanova aritmetika je korektní.
- Naším cílem je ukázat, že tato inkluze je *vlastní*, tj. že existují formule pravdivé v $(\mathbb{N}_0,*,+)$, které nejsou z Peanových axiómů dokazatelné.
- Jelikož jazyk *Provable* je podle *věty 87* rekurzivně vyčislitelný, stačí ukázat, že *Valid* není rekurzivně vyčislitelný (je vidět, že pak *Provable* $\neq$ *Valid* i pro libovolnou jinou *rekurzivní* teorii aritmetiky).

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Věta o neúplnosti. Gödelův predikát β.

Z hlediska důkazu věty o neúplnosti je jednou z podstatných vlastností přirozených čísel jejich schopnost „kódovat“ *libovolně dlouhé* konečné posloupnosti přirozených čísel.

- Definujeme 4-ární predikát β na nezáporných celých číslech předpisem
$$\beta(a,b,i,x) \iff x = a \bmod (1+b(1+i))$$
- Buď $\mathcal{S}$ nekonečná posloupnost nezáporných celých čísel, $a,b\in\mathbb{N}_0$. Řekneme, že $\mathcal{S}$ *splňuje* β (pro dané a a b), jestliže pro každé $i\in\mathbb{N}_0$ platí $\beta(a,b,i,\mathcal{S}(i))$.
- Pro každé $a,b\in\mathbb{N}_0$ existuje *jediná* posloupnost splňující β; tou je posloupnost $\mathcal{S}_{a,b}$ daná předpisem $\mathcal{S}_{a,b}(i) = a \bmod (1+b(1+i))$.
- Predikát β je vyjádřitelný v jazyce aritmetiky, neboť $x = a \bmod b$ lze napsat jako
$a\geq 0 \wedge b\geq 0 \wedge \exists k\,\big(k\geq 0 \wedge k*b\leq a \wedge (k+1)*b > a \wedge x = a-(k*b)\big)$

Věta o neúplnosti. Gödelův predikát β. (2)

Věta 88

Pro každou konečnou posloupnost $n_0, \cdots, n_k$ nezáporných celých čísel existují $n, m \in \mathbb{N}_0$ taková, že $n_j = \mathcal{S}_{n,m}(j)$ pro každé $0 \le j \le k$. To znamená, že pro každé $0 \le j \le k$ platí $\beta(n, m, j, x) \iff x = n_j$.

Důkaz. (osnova)

- Nechť $m = (\max\{k, n_0, \cdots, n_k\})!$ Čísla $p_i = 1 + m(1+i)$, kde $0 \le i \le k$, jsou navzájem nesoudělná a $n_i < p_i$ pro každé $0 \le i \le k$.
- Dále pro každé $0 \le i \le k$ definujeme

  $$c_i = p_0 \cdot \cdots \cdot p_k / p_i$$

  Nyní pro každé $0 \le i \le k$ existuje přesně jedno d_i, $0 \le d_i \le p_i$, takové, že $(c_i \cdot d_i) \bmod p_i = 1$
- Definujeme

  $$n = \sum_{i=0}^{k} c_i \cdot d_i \cdot n_i$$

  Pro každé $0 \le i \le k$ platí $n_i = n \bmod p_i$, což je tvrzení věty.

$\square$

Věta o neúplnosti. Důkaz.

Věta 89

Jazyk $Valid$ není rekurzivně vyčíslitelný.

Důkaz. Ukážeme, že existuje Turingův stroj M, který pro každé vstupní slovo u nad abecedou $\{0,1\}$ zastaví v konfiguraci, kdy je na pásce zápsáno slovo w nad abecedou $\{v, +, *, 0, S, (,), \forall, \to, \neg, =\}$ takové, že $v \in \overline{Accept}$ právě když $w \in Valid$. Pokud by tedy jazyk $Valid$ byl akceptovaný nějakým strojem M', stačilo by „napojit stroje M a M' za sebe“ a dostali bychom stroj akceptující jazyk $\overline{Accept}$, což je spor.

Stroj M pro dané vstupní slovo $u \in \{0,1\}^*$ „vypočítá“ formuli jazyka aritmetiky, která říká *„není pravda, že stroj M_u akceptuje slovo u“*.

Věta o neúplnosti. Důkaz. (2)

Pozorování: Nechť $\gamma_0 \cdots \gamma_d$ je zápis iniciální konfigurace stroje M_u pro slovo u. Stroj M_u akceptuje slovo u právě když existují $\ell, c \in \mathbb{N}_0$ a řetězec $\mathcal{S}$ nad abecedou $\Gamma_u \cup Q_u \cup \{\#\}$ tvaru $\alpha_0\#\alpha_1\#\cdots\alpha_\ell\#$ tak, že platí:

- $d < c$;
- délka α_i je $c-1$ pro každé $0 \le i \le \ell$;
- α_0 je zápisem iniciální konfigurace M_u pro slovo u, doplněným zprava znakem ␣ na délku $c-1$;
- $\alpha_i \mapsto \alpha_{i+1}$ pro každé $0 \le i < \ell$;
- v řetězci α_ℓ se vyskytuje akceptující stav stroje M_u.

Cílem našeho dalšího úsilí je „zakódovat" podmínku z předchozího pozorování jako formuli jazyka aritmetiky. Klíčovým obratem je použití Gödelova predikátu β, pomocí kterého vyjádříme existenci řetězce $\mathcal{S}$.

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Věta o neúplnosti. Důkaz. (3)

Při kódování požadavku „$\alpha_i \mapsto \alpha_{i+1}$ pro každé $0 \le i < \ell$" se uplatní následující pozorování: existuje soubor $C(M_u)$ *kompatibilních šestic* tvořený (některými) šesticemi znaků nad abecedou $\Gamma_u \cup Q_u \cup \{\#\}$ takový, že pro každou konfiguraci α délky $c-1$, každé slovo γ nad abecedou $\Gamma_u \cup Q_u \cup \{\#\}$ délky $c-1$, a každý znak s této abecedy platí následující:

> $\alpha \mapsto \gamma$ a $s = \#$ *právě když pro každé* $0 \le i \le c-3$ *tvoří trojice znaků od pozice* i *ve slově* $\alpha\#$ *následovaná trojicí znaků od pozice* i *ve slově* γs *kompatibilní šestici (pozice ve slovech číslujeme od* 0*).*

Soubor kompatibilních šestic lze pro každý Turingův stroj sestrojit algoritmicky na základě jeho přechodové funkce. Stroj M tedy dokáže vypočítat soubor $C(M_u)$ kompatibilních šestic stroje M_u.

Věta o neúplnosti. Důkaz. (4)

Každému $a \in \Gamma_u \cup Q_u \cup \{\#\}$ přidělíme jedinečné přirozené číslo $[a]$. Podmínku z předchozího pozorování pak zapíšeme jako

$$\exists\ell\,\exists c\,\exists m\,\exists n\left(d < c \wedge INIT(m,n,c) \wedge COMP(m,n,c,\ell) \wedge ACC(m,n,c,\ell)\right)$$

kde jednotlivé podformule vyjadřují následující:

- „Posloupnost $\mathcal{S}_{m,n}$ začíná zápisem iniciálním konfigurace $\mathcal{M}_u$ pro slovo u, doplněným zprava znakem $\sqcup$ na délku $c{-}1$. Pak následuje znak $\#$“.

$$INIT(m,n,c) \equiv \bigwedge_{i=0}^{d} \beta(m,n,i,[\gamma_i]) \wedge \forall i\left(d < i \leq c{-}2 \to \beta(m,n,i,[\sqcup])\right) \wedge \beta(m,n,c{-}1,[\#])$$

Matematická logika
Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Věta o neúplnosti. Důkaz. (5)

- „V posloupnosti $\mathcal{S}_{m,n}$ tvoří odpovídající trojice znaků v sousedních konfiguracích kompatibilní šestice“.

$$COMP(m,n,c,\ell) \equiv \forall i\,\forall j\left((i < \ell \wedge j \leq c{-}3) \to MATCH(m,n,i\cdot c+j,c)\right)$$

kde $MATCH(m,n,k,c)$ je formule

$$\bigvee_{(a,b,c,d,e,f)\in\mathcal{C}(\mathcal{M}_u)} TRIO(m,n,k,[a],[b],[c]) \wedge TRIO(m,n,k{+}c,[d],[e],[f])$$

a

$$TRIO(m,n,p,x,y,z) \equiv \beta(m,n,p,x) \wedge \beta(m,n,p{+}1,y) \wedge \beta(m,n,p{+}2,z)$$

- „Poslední konfigurace je akceptující“. (Předpokládejme, že akceptující stav stroje M_u je q.)

$$ACC(m,n,c,\ell) \equiv \exists i\,(i < c \wedge \beta(m,n,c\cdot\ell+i,[q]))$$

$\square$

Věta o neúplnosti. Gödelův důkaz.

Triviálním důsledkem *věty 87* a *věty 89* je následující:

Věta 90 (o neúplnosti)

Neexistuje žádná rekurzivní teorie jazyka aritmetiky, ve které jsou dokazatelné právě všechny formule pravdivé v realizaci $(\mathbb{N}_0, +, *)$. *Speciálně pro každou korektní rekurzivní teorii* T *(tj. takovou teorii, která umožnuje dokázat pouze formule pravdivé v* $(\mathbb{N}_0, +, *)$*) nutně existuje formule platná v* $(\mathbb{N}_0, +, *)$*, která není v* T *dokazatelná.*

Věta 90 bývá v literatuře také označována jako *první věta o neúplnosti*. Původní Gödelova formulace této věty (a zejména její důkaz) vypadá odlišně. Klíčové obraty v Gödelově konstrukci si nyní naznačíme. V této části se slovem „formule“ myslí *formule jazyka aritmetiky*.

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Věta o neúplnosti. Gödelův důkaz. (2)

Nechť PA značí teorii Peanovy aritmetiky, a nechť $\mathcal{N}$ značí realizaci $(\mathbb{N}_0, +, *)$ jazyka aritmetiky. Formule jsou konečná slova nad abecedou $\{v, +, *, 0, S, (,), \forall, \rightarrow, \neg, =\}$ a lze je tedy kódovat *čísly* stejným způsobem jako konfigurace Turingových strojů. Pro každou formuli φ označíme symbolem $\ulcorner\varphi\urcorner$ číslo, které je jejím kódem.

Lema 91 (Gödelovo lema o pevném bodě)

Pro každou formuli $\psi(x)$ *existuje uzavřená formule* τ *taková, že* $PA \vdash \tau \leftrightarrow \psi(\ulcorner\tau\urcorner)$. *(Formule* τ *říká „*ψ *platí pro můj kód“.)*

Důkaz. (osnova) Pro libovolnou fixní proměnnou x_0 lze sestrojit formuli $SUBST(x, y, z)$, která říká následující:

- „Číslo z je kódem formule, kterou získáme substitucí proměnné x_0 za konstantu s hodnotou x ve formuli s kódem y.“

Např. $SUBST(5, \ulcorner\varphi(x_0)\urcorner, 413)$ je pravdivá právě když $\ulcorner\varphi(5)\urcorner = 413$. Konstrukce formule $SUBST(x, y, z)$ je technická; lze použít podobný přístup jako při konstrukci formule $ACOMP$ v důkazu *věty 89*.

Věta o neúplnosti. Gödelův důkaz. (3)

Nyní definujeme

- $\sigma(x) \;\equiv\; \forall y\,(SUBST(x,x,y) \to \psi(y))$
- $\tau \;\equiv\; \sigma(\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner)$

Ověřme, že τ má požadovanou vlastnost:

- $\tau \;\equiv\; \sigma(\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner) \;\equiv\; \forall y\,(SUBST(\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner,\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner,y) \to \psi(y))$
- $\mathcal{N} \models \forall y\,(SUBST(\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner,\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner,y) \to \psi(y))$ právě když $\mathcal{N} \models \forall y\,(y = \ulcorner\sigma(\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner)\urcorner \to \psi(y))$
- $\forall y\,(y = \ulcorner\sigma(\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner)\urcorner \to \psi(y)) \;\equiv\; \forall y\,(y = \ulcorner\tau\urcorner \to \psi(y))$
- $\mathcal{N} \models \forall y\,(y = \ulcorner\tau\urcorner \to \psi(y))$ právě když $\mathcal{N} \models \psi(\ulcorner\tau\urcorner)$

Předchozí argument se opírá o *sémantickou* ekvivalenci jistých formulí; ekvivalence těchto formulí je ale ve skutečnosti *dokazatelná v PA*. Např.

$$PA \vdash (\forall y\,(y = \ulcorner\tau\urcorner \to \psi(y))) \leftrightarrow \psi(\ulcorner\tau\urcorner)$$

což je třeba v posledním bodu. Proto $PA \vdash \tau \leftrightarrow \psi(\ulcorner\tau\urcorner)$. □

Matematická logika

Antonín Kučera

Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\to,\neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Věta o neúplnosti. Gödelův důkaz. (4)

Věta 92 (1. věta o neúplnosti, Gödelova)

Lze sestrojit uzavřenou formuli ϱ, která je pravdivá v $\mathcal{N}$, ale není dokazatelná v PA.

Důkaz. (osnova) Ukáže se, že i důkazy (tj. konečné posloupnosti formulí) je možné kódovat čísly, a že existuje formule $PROOF(x,y)$, která říká, že x je kódem důkazu (v PA) pro formuli s kódem y. Dokazatelnost v PA lze pak zapsat formulí

- $PROVABLE(y) \;\equiv\; \exists x\, PROOF(x,y)$

Pak pro každou uzavřenou formuli φ platí

- $PA \vdash \varphi$ právě když $\mathcal{N} \models PROVABLE(\ulcorner\varphi\urcorner)$

Dále lze ukázat

- $PA \vdash \varphi$ právě když $PA \vdash PROVABLE(\ulcorner\varphi\urcorner)$

Směr „$\Leftarrow$“ plyne ihned z korektnosti PA (indukcí se snadno ukáže, že jestliže $PA \vdash \varphi$, pak $\mathcal{N} \models \varphi$). Opačný směr je výrazně pracnější.

Věta o neúplnosti. Gödelův důkaz. (5)

Nyní stačí aplikovat *lema 91* na formuli $\neg PROVABLE(x)$. Dostaneme tak sentenci ϱ takovou, že platí

- $PA \vdash \varrho \leftrightarrow \neg PROVABLE(\ulcorner \varrho \urcorner)$

Formule ϱ tedy říká *„já nejsem dokazatelná“*, přičemž toto tvrzení je v PA dokazatelné. Z korektnosti PA dostáváme, že

- $\mathcal{N} \models \varrho \leftrightarrow \neg PROVABLE(\ulcorner \varrho \urcorner)$

Pak ale musí platit $\mathcal{N} \models \varrho$; kdyby totiž $\mathcal{N} \models \neg\varrho$, dostaneme $\mathcal{N} \models PROVABLE(\ulcorner \varrho \urcorner)$, proto $PA \vdash \varrho$ a tedy $\mathcal{N} \models \varrho$, spor.

Jelikož $\mathcal{N} \models \varrho$, platí $\mathcal{N} \models \neg PROVABLE(\ulcorner \varrho \urcorner)$, tedy $\mathcal{N} \not\models PROVABLE(\ulcorner \varrho \urcorner)$, proto $PA \nvdash \varrho$.

Formule ϱ je tedy pravdivá v $\mathcal{N}$, ale není dokazatelná v PA. □

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Věta o neúplnosti. Tvrzení o *PA* v *PA*.

Pozorování:

- Důkaz *věty 92* se opírá o možnost vyjádřit jistá *metatvrzení* o formulích aritmetiky a teorii PA jako formule aritmetiky. Typicky lze takto vyjádřit tvrzení, která se týkají *dokazatelnosti*.
  - Metatvrzení „$PA \vdash \varphi$“ lze vyjádřit formulí $PROVABLE(\ulcorner \varphi \urcorner)$. Dokonce platí $PA \vdash \varphi$ právě když $PA \vdash PROVABLE(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
  - I metatvrzení „$PA \vdash \varphi$ právě když $PA \vdash PROVABLE(\ulcorner \varphi \urcorner)$“ lze vyjádřit v PA pomocí formule

    $$PROVABLE(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow PROVABLE(\ulcorner PROVABLE(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$$

    I tato formule je v PA dokazatelná.
  - *Bezespornost* teorie PA lze vyjádřit formulí $CONSIS \equiv \neg PROVABLE(\ulcorner \xi \wedge \neg\xi \urcorner)$, kde ξ je (nějaká) formule.

Věta o neúplnosti. Tvrzení o *PA* v *PA*. (2)

- Jsou ale i metatvrzení o formulích aritmetiky, která jako formule aritmetiky výjádřit *nelze*. Typicky se jedná o tvrzení týkající se *pravdivosti*.
  - Tvrzení „$\mathcal{N} \models \varphi$“ jako formuli aritmetiky vyjádřit nelze: Předpokládejme naopak, že existuje formule $\mathit{TRUE}(x)$ taková, že $\mathcal{N} \models \varphi$ právě když $\mathcal{N} \models \mathit{TRUE}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Pak podle *lematu 91* existuje sentence τ taková, že $\mathcal{N} \models \tau$ právě když $\mathcal{N} \models \neg\mathit{TRUE}(\ulcorner\tau\urcorner)$. Ovšem podle výše uvedeného platí $\mathcal{N} \models \tau$ právě když $\mathcal{N} \models \mathit{TRUE}(\ulcorner\tau\urcorner)$, což je spor.

Matematická logika
Antonín Kučera
Úvod
Aristotelova logika
Logický čtverec
Sylogismy
Booleova algebra logiky
Dva zákl. problémy
Řešení 1. problému
Řešení 2. problému
Výroková logika
Syntaxe
Sémantika
Plnohodnotnost
Kompaktnost
Systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$
Korektnost
Úplnost
Predikátová logika
Syntaxe
Sémantika
Odvozovací systém
Věta o úplnosti
Věta o neúplnosti
Turingův stroj
Důkaz věty o neúplnosti
Gödelův důkaz
2. věta o neúplnosti

Věta o neúplnosti. 2. věta o neúplnosti.

Úvahy o vyjádřitelnosti některých vlastností teorie *PA* formulemi aritmetiky hrají klíčovou roli v důkazu následujícího tvrzení:

Věta 93 (2. věta o neúplnosti, Gödelova)

Je-li PA bezesporná, pak CONSIS není v PA dokazatelná. (Jinými slovy: v „dostatečně silné“ teorii lze dokázat její vlastní bezespornost jen v případě, že je tato teorie sporná.)

Důkaz. (osnova) Nechť ϱ je formule zkonstruovaná v důkazu *věty 92* (která o sobě říká, že je nedokazatelná). Uvažme následující metatvrzení:

- „Jestliže $PA \vdash \varrho$, pak platí $PA \vdash \mathit{PROVABLE}(\ulcorner\varrho\urcorner)$ a současně $PA \vdash \neg\mathit{PROVABLE}(\ulcorner\varrho\urcorner)$“

Toto tvrzení je nejen pravdivé, ale lze ho vyjádřit formulí aritmetiky, která je navíc *dokazatelná* v *PA*:

- $PA \vdash \mathit{PROVABLE}(\ulcorner\varrho\urcorner) \rightarrow (\mathit{PROVABLE}(\ulcorner\mathit{PROVABLE}(\ulcorner\varrho\urcorner)\urcorner) \wedge \mathit{PROVABLE}(\ulcorner\neg\mathit{PROVABLE}(\ulcorner\varrho\urcorner)\urcorner))$

Proto platí také $PA \vdash \mathit{PROVABLE}(\ulcorner\varrho\urcorner) \rightarrow \neg\mathit{CONSIS}$.

Věta o neúplnosti. 2. věta o neúplnosti. (2)

Obměnou uvedeného tvrzení dostáváme

- $PA \vdash CONSIS \to \neg PROVABLE(\ulcorner\varrho\urcorner)$

Kdyby $PA \vdash CONSIS$, platilo by také $PA \vdash \neg PROVABLE(\ulcorner\varrho\urcorner)$ (aplikací MP). Už dříve jsme ale ukázali (viz důkaz *věty 92*), že

- $PA \vdash \varrho \leftrightarrow \neg PROVABLE(\ulcorner\varrho\urcorner)$

Další aplikací MP tedy dostáváme $PA \vdash \varrho$. Výše jsme ale ukázali, že předpoklad $PA \vdash \varrho$ implikuje, že PA je sporná. Celkem tedy dostáváme, že předpoklad $PA \vdash CONSIS$ implikuje, že PA je sporná. $\square$

Na intuitivní úrovni: druhá věta o neúplnosti říká, že bezespornost „dostatečně silné" teorie (např. teorie množin) *nelze v této teorii dokázat*. Jediná možnost je použít *metaargumenty*, tj. zdůvodnit bezespornost dané teorie pomocí teorie „vyšší". Ani bezespornost této vyšší teorie není ovšem možno prokázat v ní samé. Na nějaké úrovni nám prostě nezbývá, než v bezespornost *uvěřit*, resp. ji *předpokládat*. Gödelovy výsledky o neúplnosti mají tedy i svůj *epistemologický* význam.