Predikátová logika - cvičení

V celém textu budeme používat následující konvence: Nosič realizace $\mathcal{M}$ budeme značit M (podobně například nosič realizace $\mathcal{M}_2$ bude M_2 apod.). Symbol $=$ budeme používat nejen jako formální symbol z jazyka s rovností, ale i jako metasymbol označující stejná individua (význam by měl být jasný z kontextu). Dále budeme používat metasymbol $\Leftrightarrow$, který bude zastupovat frázi "právě tehdy, když".

1 Základy predikátové logiky

1.1 Příklad:

Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ s rovností, kde $\cdot$ je binární funkční symbol a realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$. Dejte příklad *uzavřené* formule φ predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$ takové, že $\mathcal{M} \models \varphi$ právě tehdy, když

1. $(M, \cdot_M)$ je pologrupa
2. $(M, \cdot_M)$ je monoid
3. $(M, \cdot_M)$ je grupa

Řešení:

1. $\varphi \equiv \forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
2. Označme φ_p formuli z 1. Pak $\varphi \equiv \varphi_p \wedge \exists x \forall y(x \cdot y = y \wedge y \cdot x = y)$
3. $\varphi \equiv \varphi_p \wedge \exists x(\forall y(x \cdot y = y \wedge y \cdot x = y) \wedge \forall z \exists u(z \cdot u = x \wedge u \cdot z = x))$

1.2 Příklad:

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Mějme nějaký jazyk $\mathcal{L}$, realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ a formuli φ predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$. Pak

$$\mathcal{M} \models \varphi \text{ právě tehdy, když } \mathcal{M} \not\models \neg\varphi$$

Řešení:

Implikace "zleva doprava" platí. Dokážeme tedy následující tvrzení:

Tvrzení: Jestliže $\mathcal{M} \models \varphi$, pak $\mathcal{M} \not\models \neg\varphi$.

Důkaz: Předpokládejme, že $\mathcal{M} \models \varphi$. Pak (z definice) pro každé ohodnocení e platí $\mathcal{M} \models \varphi[e]$. Nosič $\mathcal{M}$ je neprázdný (z definice realizace) a tedy *existuje* alespoň jedno ohodnocení e takové, že $\mathcal{M} \models \varphi[e]$. Pak ale $\mathcal{M} \not\models \neg\varphi[e]$ a tedy $\mathcal{M} \not\models \neg\varphi$.

Implikace "zprava doleva" neplatí. Dokážeme tedy:

Tvrzení: Existují jazyk $\mathcal{L}$, realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ a formule φ predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$ takové, že $\mathcal{M} \not\models \varphi$ a zároveň $\mathcal{M} \not\models \neg\varphi$.

Důkaz: Položme $\mathcal{L} = \{P\}$ kde P je unární predikátový symbol. Realizaci $\mathcal{M}$ definujme následovně: nosič $M = \{a, b\}$ a $P_M = \{a\}$ (P_M je unární relace). Konečně položme $\varphi = P(x)$.

Nyní nechť e je ohodnocení takové, že $e(x) = a$. Pak $\mathcal{M} \models P(x)[e]$, protože $e(x) = a \in P_M$ a tedy $\mathcal{M} \not\models \neg P(x)[e]$. Z toho plyne, že $\mathcal{M} \not\models \neg P(x)$.

Dále nechť e je ohodnocení takové, že $e(x) = b$. Pak $\mathcal{M} \not\models P(x)[e]$ a tedy $\mathcal{M} \not\models P(x)$.

Celkem tedy $\mathcal{M} \not\models \neg P(x)$ a zároveň $\mathcal{M} \not\models P(x)$, což bylo dokázat.

1.3 Příklad:

Dokažte, že platí následující tvrzení: Mějme jazyk $\mathcal{L}$, realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ a *uzavřenou* formuli φ predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$. Pak

$$\mathcal{M} \models \varphi \text{ právě tehdy, když } \mathcal{M} \not\models \neg\varphi$$

Řešení:

Nejprve dokážeme následující tvrzení.

Tvrzení:

1. Je-li t term jazyka $\mathcal{L}$ a e_1, e_2 jsou ohodnocení taková, že $e_1(x) = e_2(x)$ platí pro každou proměnnou x vyskytující se v t, pak $t[e_1] = t[e_2]$.

2. Je-li φ formule predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$, pak pro libovolná ohodnocení e_1, e_2 taková, že $e_1(x) = e_2(x)$ pro každou proměnnou x, která je *volná* ve φ, platí $\mathcal{M} \models \varphi[e_1]$ právě tehdy, když $\mathcal{M} \models \varphi[e_2]$.

Důkaz:

1. Tvrzení dokážeme metaindukcí vzhledem k délce vytvořující posloupnosti pro t (tj. strukturální indukcí).

- Je-li $t = x$ proměnná, pak

$$t[e_1] = x[e_1] = e_1(x) = e_2(x) = x[e_2] = t[e_2]$$

- Je-li $t = f(t_1, \dots, t_n)$ kde f je n-ární funkční symbol jazyka $\mathcal{L}$ a $t_1, \dots, t_n$ jsou termy, pak

$$\begin{aligned} t[e_1] = f(t_1, \dots, t_n)[e_1] = f_M(t_1[e_1], \dots, t_n[e_1]) = \\ f_M(t_1[e_2], \dots, t_n[e_2]) = f(t_1, \dots, t_n)[e_2] = t[e_2] \end{aligned}$$

  kde druhá rovnost plyne z indukčního předpokladu.

2. Tvrzení dokážeme metaindukcí vzhledem k délce vytvořující posloupnosti pro φ.

- Je-li $\varphi \equiv P(t_1, \dots, t_n)$ kde P je n-ární predikátový symbol a $t_1, \dots, t_n$ jsou termy, pak

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi[e_1] &\Leftrightarrow (t_1[e_1], \dots, t_n[e_1]) \in P_M \\ &\Leftrightarrow (t_1[e_2], \dots, t_n[e_2]) \in P_M \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[e_2] \end{aligned}$$

  kde druhá ekvivalence plyne z 1. a z toho, že ve φ jsou všechny proměnné volné.

- Je-li $\mathcal{L}$ jazyk s rovností a $\varphi \equiv t_1 = t_2$ kde t_1, t_2 jsou termy, pak podobně jako v předchozím bodě máme

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi[e_1] &\Leftrightarrow t_1[e_1] = t_2[e_1] \\ &\Leftrightarrow t_1[e_2] = t_2[e_2] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[e_2] \end{aligned}$$

- Je-li $\varphi \equiv \neg\psi$, pak

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi[e_1] &\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \psi[e_1] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \psi[e_2] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[e_2] \end{aligned}$$

  kde druhá ekvivalence plyne z indukčního předpokladu a z toho, že libovolná proměnná je volná v ψ tehdy a jen tehdy, když je volná ve φ.

- Je-li $\varphi \equiv \psi_1 \to \psi_2$, pak

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi[e_1] &\Leftrightarrow \text{ buď } \mathcal{M} \models \psi_2[e_1] \text{ nebo } \mathcal{M} \not\models \psi_1[e_1] \\ &\Leftrightarrow \text{ buď } \mathcal{M} \models \psi_2[e_2] \text{ nebo } \mathcal{M} \not\models \psi_1[e_2] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[e_2] \end{aligned}$$

  kde druhá ekvivalence plyne z indukčního předpokladu a z toho, že libovolná proměnná je volná v ψ_1 nebo v ψ_2 tehdy a jen tehdy, když je volná ve φ.

- Je-li $\varphi \equiv \forall y \psi$, pak

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \varphi[e_1] \quad &\Leftrightarrow \quad \text{pro každé } a \in M \text{ platí } \mathcal{M} \models \psi[e_1(y/a)] \\
&\Leftrightarrow \quad \text{pro každé } a \in M \text{ platí } \mathcal{M} \models \psi[e_2(y/a)] \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \models \varphi[e_2]
\end{aligned}$$

  kde druhou ekvivalenci lze zdůvodnit takto: Z definice plyne, že pokud je libovolná proměnná x volná v ψ, pak buď x je y nebo x je volná ve φ. Z toho plyne, že pro libovolnou proměnnou x, která je volná v ψ a pro libovolné $a \in M$ platí, že $e_1(y/a)(x) = e_2(y/a)(x)$. Požadovaná ekvivalence potom plyne z indukčního přepokladu.

Nyní dokážeme tvrzení ze zadání příkladu.

Důkaz: $\Rightarrow$: Tento směr byl v obecnější podobě dokázán v Příkladu 1.2.
$\Leftarrow$: Předpokládejme, že $\mathcal{M} \not\models \varphi$. Potom existuje ohodnocení e takové, že $\mathcal{M} \not\models \varphi[e]$. Protože *žádná* proměnná není volná ve φ, dostaneme z předchozího tvrzení, že $\mathcal{M} \not\models \varphi[e']$ a tedy $\mathcal{M} \models \neg\varphi[e']$ pro *libovolné* ohodnocení e'. Z definice nyní plyne, že $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.

1.4 Příklad:

Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{<\}$ s rovností, kde $<$ je binární predikátový symbol. Uvažme tři realizace $\mathcal{N}, \mathcal{Z}, \mathcal{Q}$ jazyka $\mathcal{L}$ s nosiči $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ (množiny přirozených, celých a racionálních čísel), které interpretují symbol $<$ jako standardní *ostré* uspořádání na příslušné množině čísel. Dejte příklad uzavřené formule φ predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$ takové, že

1. $\mathcal{N} \models \varphi, \mathcal{Z} \not\models \varphi, \mathcal{Q} \not\models \varphi$
2. $\mathcal{N} \not\models \varphi, \mathcal{Z} \models \varphi, \mathcal{Q} \not\models \varphi$
3. $\mathcal{N} \not\models \varphi, \mathcal{Z} \not\models \varphi, \mathcal{Q} \models \varphi$

Řešení:

1. $\varphi \equiv \exists x \forall y (x = y \vee x < y)$
2. $\varphi \equiv \forall x \exists y (y < x \wedge \forall z (z < y \vee x < z \vee z = y \vee z = x))$
3. $\varphi \equiv \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$ [1]

[1] také lze použít formuli $\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2$ kde ψ_1 je formule z 1. a ψ_2 je formule z 2.

Úlohy:

Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ s rovností, kde $\cdot$ je binární funkční symbol. Uvažme tři realizace $\mathcal{Z}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ s nosiči $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (množiny celých, racionálních a reálných čísel), které intepretují symbol $\cdot$ jako standardní násobení čísel. Dejte příklad uzavřené formule φ predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$ takové, že

1. $\mathcal{Z} \not\models \varphi, \mathcal{Q} \models \varphi$
2. $\mathcal{Q} \not\models \varphi, \mathcal{R} \models \varphi$

1.5 Příklad:

Nechť φ je formule predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$ taková, že x je jediná volná proměnná ve φ. Rozhodněte, zda pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ a libovolnou proměnnou y substituovatelnou za x ve φ platí $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \varphi(x/y)$.

Řešení:

Odpověď: Tvrzení neplatí! Zdůvodnění: Nechť $\mathcal{L} = \{P\}$ kde P je unární predikátový symbol. Definujme realizaci $\mathcal{M}$ takto:

- $M = \{a, b\}$
- $P_M = \{a\}$

Nyní uvažme ohodnocení e takové, že $e(x) = a$ a $e(y) = b$ a formuli $\varphi \equiv P(x)$. Zřejmě $\mathcal{M} \not\models (P(x) \rightarrow P(x)(x/y))[e]$, protože $e(x) = a \in P_M$ a $e(y) = b \notin P_M$.

Poznámka: $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \exists y \varphi(x/y)$ platí pro libovolnou realizaci jazyka $\mathcal{L}$.

2 Teorie

2.1 Příklad:

Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{S\}$ s rovností, kde S je unární funkční symbol. Dejte příklad *splnitelné konečné* teorie T s jazykem $\mathcal{L}$ takové, že všechny její modely mají *nekonečný* nosič.

Řešení:

Uvažme $T = \{\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y), \exists y \forall x \neg(S(x) = y)\}$.

Nejprve ukážeme, že teorie T nemá konečný model. Nechť $\mathcal{M}$ je model teorie T. Potom S_M je *injektivní* funkce definovaná na M, která není *surjektivní*. Taková funkce ovšem nemůže existovat na konečném souboru, a proto M musí být nekonečný soubor.

Nyní ukážeme, že T je splnitelná. Definujme realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ takto:

- $M = \mathbb{N}_0$ (přirozená čísla s nulou)
- $S_M(n) = n + 1$ pro $n \in \mathbb{N}_0$

Je zřejmé, že $\mathcal{M} \models T$.

2.2 Příklad:

Nechť $\varphi \equiv \forall x \neg(S(x) = x)$ a nechť T je teorie z Příkladu 2.1. Rozhodněte, zda platí $T \models \varphi$.

Řešení:

Odpověď: Neplatí! Zdůvodnění: Definujme realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ takto:

- $M = \mathbb{N}_0$
- $S_M(0) = 0$ a $S_M(i) = i + 1$ pro $i \geq 1$

Realizace $\mathcal{M}$ je zřejmě modelem T a zároveň $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

2.3 Příklad:

Je teorie T z Příkladu 2.2 bezesporná? Je T úplná?

Řešení:

Z věty o korektnosti plyne, že každá splnitelná teorie je bezesporná. Opravdu, ve sporné teorii jsou dokazatelné i formule tvaru $\varphi \wedge \neg\varphi$, což znamená, že formule tvaru $\varphi \wedge \neg\varphi$ jsou sémantickým důsledkem sporné teorie (a proto sporná teorie nemůže mít model). Z toho plyne, že T je bezesporná.

Teorie T není úplná. Uvažme formuli $\varphi \equiv \forall x \neg(S(x) = x)$ z Příkladu 2.2. Ukázali jsme, že $T \not\models \varphi$. Na druhou stranu $\neg\varphi \equiv \exists x(S(x) = x)$ a model teorie T z Příkladu 2.1 ukazují, že $T \not\models \neg\varphi$. Z věty of korektnosti plyne, že $T \nvdash \varphi$ a $T \nvdash \neg\varphi$ a tedy, že T není úplná teorie.

3 Kanonická struktura

Pro celou sekci 3 fixujme jazyk $\mathcal{L} = \{P, 0, f\}$ kde P je unární predikátový symbol, 0 je nulární funkční symbol a f je unární funkční symbol.

3.1 Příklad:

Popište kanonickou strukturu teorie $T_1 = \{P(0)\}$ s jazykem $\mathcal{L}$.

Řešení:

Kanonická struktura teorie T_1 je realizace $\mathcal{M}_1$ jazyka $\mathcal{L}$ taková, že

- $M_1 = \{f^i(0) \mid i \geq 0\}$ (kde $f^0(0) = 0$)
- $f_{M_1}(f^i(0)) = f(f^i(0)) = f^{i+1}(0)$
- $0_{M_1} = 0$
- $P_{M_1} = \{0\}$

Jediná věc, která není zřejmá z definice kanonické struktury je $P_{M_1} = \{0\}$. Musíme ukázat, že $T \vdash P(0)$, a že $T \nvdash P(f^i(0))$ pro $i \geq 1$.

- Zřejmě $T \vdash P(0)$.
- Nechť $i \geq 1$. Stačí ukázat, že $T \not\models P(f^i(0))$. Požadovaný výsledek pak plyne z věty o korektnosti. Nechť $\mathcal{M}$ je realizace jazyka $\mathcal{L}$ definovaná následovně:
  - $M = \{a, b\}$
  - $f_M(a) = b$ a $f_M(b) = b$
  - $0_M = a$
  - $P_M = \{a\}$

  Zřejmě $\mathcal{M} \models T$, protože $a \in P_M$, a zřejmě také $\mathcal{M} \not\models P(f^i(0))$, protože $f^i_M(a) = b \notin P_M$. Celkem tedy $T \not\models P(f^i(0))$.

3.2 Příklad:

Popište kanonickou strukturu teorie $T_2 = \{P(x)\}$ s jazykem $\mathcal{L}$.

Řešení:

Kanonická struktura $\mathcal{M}_2$ teorie T_2 se liší od struktury $\mathcal{M}_1$ z Příkladu 3.1 pouze v interpretaci predikátového symbolu P. Dokážeme, že $P_{M_2} = \{f^i(0) \mid i \geq 0\}$.

Dle definice kanonické struktury musíme ukázat, že $T \vdash P(f^i(0))$ pro $i \geq 0$. Důkaz může vypadat takto:

$$
\begin{array}{lcll}
T & \vdash & P(x) & P(x) \in T \\
T & \vdash & \forall x P(x) & GEN \\
T & \vdash & \forall x P(x) \rightarrow P(x)(x/f^i(0)) & P4 \\
T & \vdash & P(x/f^i(0)) & MP
\end{array}
$$

3.3 Příklad:

Popište kanonickou strukturu teorie $T_3 = \{\exists x P(x)\}$ s jazykem $\mathcal{L}$.

Řešení:

Kanonická struktura $\mathcal{M}_3$ teorie T_3 se liší od struktur $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$ z předchozích příkladů pouze v interpretaci predikátového symbolu P. Dokážeme, že $P_{M_3} = \emptyset$.

Ukážeme, že $T \not\models P(f^i(0))$ pro $i \geq 0$. Požadovaný výsledek pak plyne z věty o korektnosti. Nechť $\mathcal{M}$ je realizace jazyka $\mathcal{L}$ definovaná následovně:

- $M = \{a, b\}$
- $f_M(a) = a$ a $f_M(b) = b$
- $0_M = b$
- $P_M = \{a\}$

Zřejmě $\mathcal{M} \models T$, protože $a \in P_M$, a zřejmě také $\mathcal{M} \not\models P(f^i(0))$, protože $f^i_M(0_M) = b \notin P_M$. Celkem tedy $T \not\models P(f^i(0))$.

Poznámka: Všimněte si, že kanonická struktura $\mathcal{M}_3$ není modelem T_3.

4 Existence teorií

4.1 Příklad:

Nechť T je konečná teorie s jazykem $\mathcal{L}$. Dokažte, že existuje konečná teorie T' s jazykem $\mathcal{L}$ taková, že $\mathcal{M} \models T'$ právě tehdy, když $\mathcal{M} \not\models T$ pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$.

Řešení:

Nejprve předpokládejme, že $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ kde $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jsou uzavřené formule. Uvažme $T' = \{\bigvee_{i=1}^n \neg\varphi_i\}$. Pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \textstyle\bigvee_{i=1}^n \neg\varphi_i \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \models \textstyle\bigvee_{i=1}^n \neg\varphi_i[e] \text{ pro každé ohodnocení } e \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \models \neg\varphi_i[e] \text{ pro nějaké } i \text{ a pro každé ohodnocení } e \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \models \neg\varphi_i \text{ pro nějaké } i \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \not\models \varphi_i \text{ pro nějaké } i \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \not\models T
\end{aligned}$$

kde druhá ekvivalence plyne z uzavřenosti formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ a Tvrzení z Příkladu 1.3 ($\mathcal{M} \models \neg\varphi_i[e]$ pro nějaké i a nějaké e a tudíž pro všechna e, protože $\neg\varphi_i$ je uzavřená) a čtvrtá ekvivalence je přímo tvrzení dokázané v Příkladu 1.3.

V obecném případě nemusí být formule z T uzavřené. Tuto situaci řeší následující jednoduché tvrzení.

Tvrzení: Nechť φ je formule predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$ a nechť x je proměnná. Potom pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{M} \models \varphi$.

Důkaz:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \forall x\varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \models \forall x\varphi[e] \text{ pro každé ohodnocení } e \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \models \varphi[e(x/a)] \text{ pro každé ohodnocení } e \text{ a pro každé } a \in M \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \models \varphi[e] \text{ pro každé ohodnocení } e \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \models \varphi
\end{aligned}$$

4.2 Příklad:

Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk s rovností. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

1. Existuje teorie T s jazykem $\mathcal{L}$ taková, že $\mathcal{M} \models T$ právě tehdy, když nosič $\mathcal{M}$ je konečný.
2. Existuje teorie T s jazykem $\mathcal{L}$ taková, že $\mathcal{M} \models T$ právě tehdy, když nosič $\mathcal{M}$ je nekonečný.
3. Existuje *konečná* teorie T s jazykem $\mathcal{L}$ taková, že $\mathcal{M} \models T$ právě tehdy, když nosič $\mathcal{M}$ je nekonečný.

Řešení:

1. Odpověď: Ne! Zdůvodnění: Z přenášky víme, že platí následující tvrzení: Pokud pro každé n existuje model teorie T mohutnosti alespoň n, pak existuje i nekonečný model teorie T.
2. Odpověď: Ano! Zdůvodnění: Uvažme

   $$T = \{\varphi_i \mid \varphi_i = \forall x_1 \cdots \forall x_i \exists y (\wedge_{j=1}^{i} \neg(x_j = y)), i \geq 1\}$$

   Zřejmě platí, že $\mathcal{M} \models \varphi_i$ právě tehdy, když nosič $\mathcal{M}$ obsahuje více než i prvků.
3. Odpověď: Ne! Zdůvodnění: Předpokládejme, že T je taková teorie. Pak dle Příkladu 4.1 existuje konečná teorie T' taková, že $\mathcal{M} \models T'$ právě tehdy, když $\mathcal{M} \not\models T$ pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$. Avšak, modely teorie T' jsou právě realizace jazyka $\mathcal{L}$ s konečným nosičem, což je spor s 1.

4.3 Příklad:

Nechť $\mathcal{L} = \{R\}$ je jazyk s rovností, kde R je binární predikátový symbol. Dokažte, že neexistuje teorie T taková, že pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{M} \models T$ právě tehdy, když (M, R_M) je silně souvislý orientovaný graf.

Řešení:

Předpokládejme, že taková teorie T existuje. Uvažme novou teorii $T' = T \cup \{\forall x \forall y_1 \forall y_2 (R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2)\}$. Pro každé $n \geq 1$ má teorie T model $\mathcal{M}$ mohutnosti n s nosičem $M = \{1, \ldots, n\}$ a $R_M = \{(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n), (n, 1)\}$. Z toho plyne, že existuje i nekonečný model $\mathcal{M}_\infty$ teorie T'. Ukážeme, že to není možné.

Nechť $c, d \in M_\infty$ jsou navzájem různá individua. Protože (M_∞, R_{M_∞}) je silně souvislý graf, existují individua $a_0, \ldots, a_k, \ldots, a_{k+\ell} \in M_\infty$ taková, že $a_0 = a_{k+\ell} = c$, $a_k = d$ a $(a_i, a_{i+1}) \in R_{M_\infty}$ pro $0 \leq i < k + \ell$. Soubor M_∞ je nekonečný, a proto existuje $e \in M_\infty$ takové, že $e \neq a_i$ pro $0 \leq i \leq k + \ell$. Avšak e je také dosažitelné z c, tj. existují individua $b_0, \ldots, b_r \in M_\infty$ navzájem různá taková, že $e = b_r$, $c = b_0$ a $(b_i, b_{i+1}) \in R_{M_\infty}$ pro $0 \leq i < r$. Uvažme největší j takové, že $b_j = a_j$. Pak $j < k + \ell$ (z různosti $b_0, \ldots, b_r$), $b_{j+1} \neq a_{j+1}$, $(a_j, a_{j+1}) \in R_{M_\infty}$ a $(a_j, b_{j+1}) \in R_{M_\infty}$ což je spor s tím, že M_∞ je modelem teorie T'.