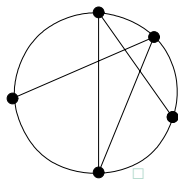
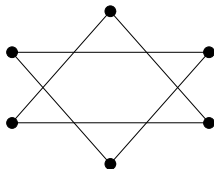
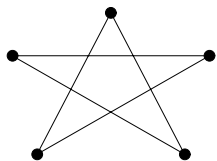


## 2 Souvislost grafů

Pokud máme graf, který modeluje nějaká spojení či síť, přirozeně nás zajímá, jakou máme možnost se dostat odněkud někam v tomto grafu. To má množství praktických motivací – například počítačové, dopravní, telefonní či potrubní sítě. Je pochopitelné, že v takových sítích chceme mít možnost se dostat z každého místa do každého jiného.

Grafům s takovou vlastností říkáme *souvislé*.



### Stručný přehled lekce

- Definice souvislosti grafu, vrcholová / hranová, vyšší souvislost.
- Algoritmus procházení grafem (souvislou komponentou).
- Eulerovské grafy.

## 2.1 Spojení vrcholů, komponenty

**Definice:** *Sledem* délky  $n$  v grafu  $G$  rozumíme posloupnost vrcholů a hran

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n,$$

ve které vždy hrana  $e_i$  má koncové vrcholy  $v_{i-1}, v_i$ .

Sled je vlastně procházka po hranách grafu z  $u$  do  $v$ . Příkladem sledu může být průchod IP paketu internetem (včetně cyklení). □

**Lema 2.1.** *Mějme relaci  $\sim$  na množině vrcholů  $V(G)$  libovolného grafu  $G$  takovou, že pro dva vrcholy  $u \sim v$  právě když existuje v  $G$  sled začínající v  $u$  a končící ve  $v$ . Pak  $\sim$  je relací ekvivalence.*

**Důkaz.** Relace  $\sim$  je reflexivní, neboť každý vrchol je spojený sám se sebou sledem délky 0. Symetrická je také, protože sled z  $u$  do  $v$  snadno obrátíme na sled z  $v$  do  $u$ . Stejně tak je  $\sim$  tranzitivní, protože dva sledy můžeme na sebe navázat v jeden. □ □

**Definice:** Třídy ekvivalence výše popsané (Lema 2.1) relace  $\sim$  na  $V(G)$  se nazývají *komponenty souvislosti* grafu  $G$ .

Jinak se taky *komponentami souvislosti myslí podgrafy* indukované na těchto třídách ekvivalence.

Připomeňme si, že *cesta v grafu* je vlastně sledem bez opakování vrcholů.

**Věta 2.2.** *Pokud mezi dvěma vrcholy grafu  $G$  existuje sled, pak mezi nimi existuje cesta.* □

**Důkaz.** Necht'  $u = v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n = v$  je sled délky  $n$  mezi vrcholy  $u$  a  $v$  v  $G$ . Začneme budovat **nový sled  $W$**  z vrcholu  $w_0 = u$ , který už bude cestou:

- Předpokládejme, že nový sled  $W$  už má počátek  $w_0, e_1, w_1, \dots, w_i$  (na začátku  $i = 0$ , tj. jen  $w_0$  bez hran), kde  $w_i = v_j$  pro některé  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ . □
- Najdeme **největší index  $k \geq j$**  takový, že  $v_k = v_j = w_i$ , a sled  $W$  pokračujeme krokem  $\dots, w_i = v_j = v_k, e_{k+1}, w_{i+1} = v_{k+1}, \dots$  □
- Zbývá dokázat, že nový vrchol  $w_{i+1} = v_{k+1}$  se ve sledu  $W$  neopakuje. Pokud by tomu ale tak bylo  $w_l = w_{i+1}$ ,  $l \leq i$ , pak bychom na vrchol  $w_{i+1}$  „přeskočili“ už dříve z vrcholu  $w_l$ , spor.
- Nakonec skončíme, když  $w_i = v$ . □

□

Ačkoliv uvedený důkaz vypadá složitě, je to jen jeho formálním zápisem. Ve skutečnosti se v důkaze neděje nic jiného, než že se původní sled zkracuje o opakované vrcholy, až nakonec zákonitě vznikne cesta. Jeho výhodou je konstruktivnost – vidíme, jak cestu získat.

**Důkaz** kratší, ale **nekonstruktivní**, pro Větu 2.2:

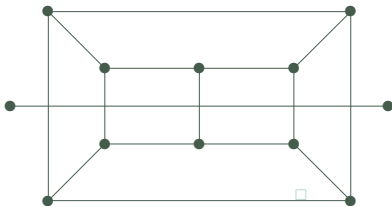
Ze všech sledů mezi vrcholy  $u$  a  $v$  v  $G$  vybereme sled  $W$  s nejmenší délkou. Je snadno vidět, že pokud  $W$  zopakuje některý vrchol grafu  $G$ , můžeme  $W$  ještě zkrátit, a to je spor s předpokladem. Proto je  $W$  cestou v  $G$ .  $\square$

Závěrem se dostáváme k nejdůležitější definici souvislého grafu:

**Definice 2.3. Graf  $G$  je souvislý**

pokud je  $G$  tvořený nejvýše jednou komponentou souvislosti, tj. pokud každé dva vrcholy  $G$  jsou **spojené cestou** (dle Věty 2.2).

Podívejte se, kolik komponent souvislosti má tento graf:



Vidíte obě dvě komponenty?

## 2.2 Prohledávání grafu

Pro vytvoření co nejobecnějšího schématu *algoritmu pro procházení grafu* vystačíme s následujícími datovými stavy a pomocnou strukturou:

- **Vrchol:** má stavy ...
  - iniciační – dostane na začátku,
  - nalezený – poté, co jsme jej přes některou hranu našli,
  - zpracovaný – poté, co jsme už probrali všechny hrany z něj vycházející.
- **Hrana:** má stavy ...
  - iniciační – dostane na začátku,
  - zpracovaná – poté, co už byla probrána od jednoho ze svých vrcholů. □
- **Úschovna:** je pomocná datová struktura (množina),
  - udržuje nalezené a ještě nezpracované vrcholy.

**Poznámka:** Způsob, kterým se vybírají vrcholy z úschovny ke zpracování, určuje variantu algoritmu procházení grafu. V prohledávaných vrcholech a hranách se pak provádějí konkrétní programové **akce pro prohledání a zpracování** našeho grafu.

## Algoritmus 2.4. Procházení souvislé komponenty grafu

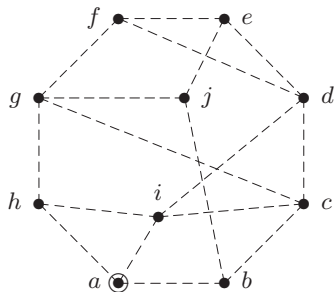
Algoritmus projde a zpracuje každou hranu a vrchol *souvislého* grafu  $G$ .

```
vstup < graf  $G$ ;  
stav(všechny vrcholy a hrany  $G$ ) = iniciační;  
uschovna  $U = \{\text{libovolný vrchol } v_0 \text{ grafu } G\}$ ;  
stav( $v_0$ ) = nalezený;  
while ( $U$  je neprázdná) {  
    vybrat  $v \in U$ ;     $U = U \setminus \{v\}$ ;  
    ZPRACUJ( $v$ );  
    foreach ( $e$  hrana vycházející z  $v$ ) {  
        if (stav( $e$ )==iniciační) ZPRACUJ( $e$ );  
         $w = \text{opačný vrchol hrany } e = vw$ ;  
        if (stav( $w$ )==iniciační) {  
            stav( $w$ ) = nalezený;  
             $U = U \cup \{w\}$ ;  
        }  
        stav( $e$ ) = zpracovaná;  
    }  
    stav( $v$ ) = zpracovaný;  
}  
 $G$  zpracovaný;
```

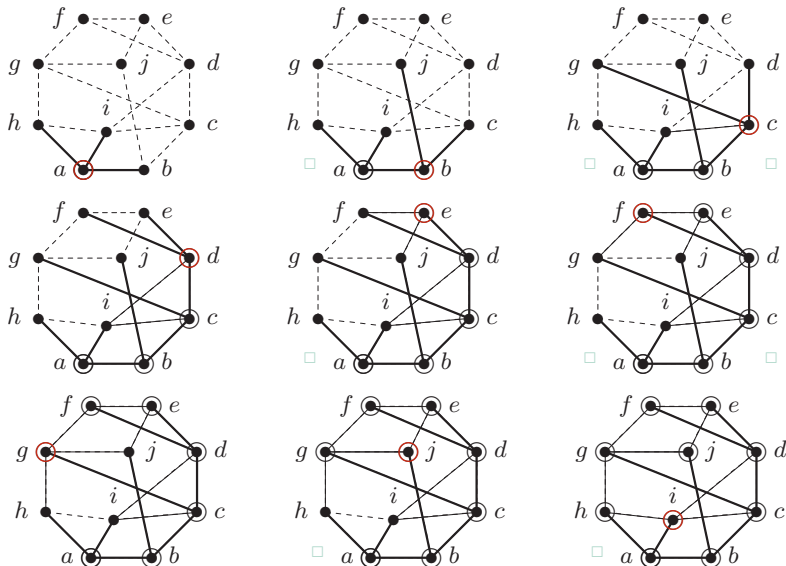
## Způsoby implementace procházení grafu

- *Procházení „do hloubky“* – úschovna  $U$  je implementovaná jako zásobník, tj. dále prohledáváme od posledních nalezených vrcholů. □
- *Procházení „do šířky“* – úschovna  $U$  je implementovaná jako fronta, tj. dále prohledáváme od prvních nalezených vrcholů. □
- *Dijkstrův algoritmus* pro nejkratší cestu – z úschovny vybíráme vždy vrchol nejbližší k počátečnímu  $v_0$ . (Toto je dost podobné prohledávání do šířky, ale obecnější i pro případy, kdy hrany nejsou „stejně dlouhé“.)  
Tento algoritmus bude popsán v příští lekci. □

**Příklad 2.11.** Ukázka průchodu následujícím grafem do hloubky z vrcholu  $a$ .

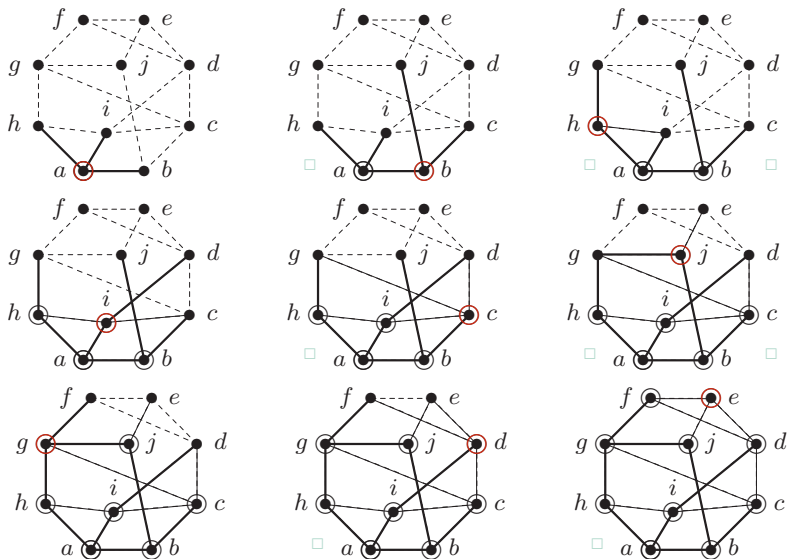


Neprohledané hrany jsou čárkované, prohledané hrany plnou čarou a hrany, které vedly k nalezení vrcholů, jsou tlustou čarou (tyto hrany často mívají speciální význam v aplikacích schématu algoritmu). Nalezené vrcholy se poznají podle příchozí tlusté hrany a zpracované vrcholy jsou značené dvojím kroužkem.





**Příklad 2.12.** Ukázka průchodu předchozím grafem do šířky z vrcholu  $a$ .



Tímto zpracování zadaného grafu skončilo. Vidíte rozdíly tohoto průchodu proti předchozímu příkladu? □

## 2.3 Vyšší stupně souvislosti

V *síťových aplikacích* nás často zajímá nejen, jestli se za normálních podmínek můžeme pohybovat mezi vrcholy/uzly, ale také, jaké spojení můžeme nalézt v případě lokálních výpadků (odolnost a redundance).

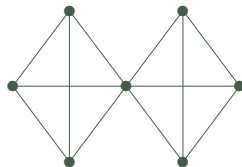
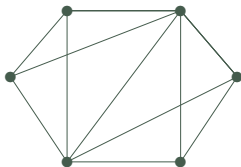
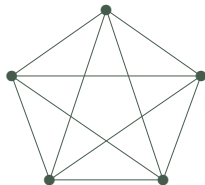
Toto lze teoreticky podchytit zkoumáním „vyšších“ stupňů souvislosti grafu. □

**Definice:** Graf  $G$  je *hranově  $k$ -souvislý*,  $k > 1$ , pokud i po odebrání libovolných **nejvýše**  $k - 1$  hran z  $G$  zůstane výsledný graf souvislý. □

**Definice:** Graf  $G$  je *vrcholově  $k$ -souvislý*,  $k > 1$ , pokud i po odebrání libovolných nejvýše  $k - 1$  vrcholů z  $G$  zůstane výsledný graf souvislý.  
Speciálně úplný graf  $K_n$  je vrcholově  $(n - 1)$ -souvislý.

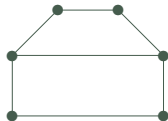
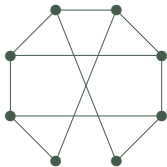
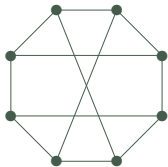
Pokud mluvíme jen o  $k$ -souvislém grafu, máme na mysli **vrcholově  $k$ -souvislý** graf. □

Stručně řečeno, vysoká hranová souvislost znamená vysoký stupeň odolnosti sítě proti výpadkům spojení-hran, neboli síť zůstane stále dosažitelná, i když libovolných  $k - 1$  spojení bude přerušeno. Vysoká vrcholová souvislost je mnohem silnějším pojmem, znamená totiž, že síť zůstane dosažitelná i po výpadku libovolných  $k - 1$  uzlů-vrcholů (samozřejmě mimo těch vypadlých uzlů).



Na ilustračním obrázku má první graf vrcholovou souvislost 4 a snadno vidíme, že po odebrání tří vrcholů či hran zůstává souvislý. Z druhého grafu bychom museli odebrat nejméně 3 hrany, aby se stal nesouvislým, a proto je jeho hranová souvislost 3. Na druhou stranu však stačí odebrat 2 vrcholy, aby mezi jeho levým a pravým krajním vrcholem žádné spojení nezůstalo. (Vidíte, které dva?) A jak je tomu u třetího grafu? □

**Věta 2.5.** *Libovolný obyčejný graf je 2-souvislý, právě když jej lze vytvořit z kružnice „přidáváním uší“; tj. iterací operace, kdy libovolné dva stávající vrcholy grafu jsou spojeny novou cestou libovolné délky (ale ne paralelní hranou).*



## Mengerova věta

Důkaz následujícího důležitého výsledku by nebyl jednoduchý při použití stávajících znalostí, proto jej ponecháme na pozdější lekce. . . („Toky v sítích“.)

**Věta 2.6.** *Graf  $G$  je hranově  $k$ -souvislý právě když mezi libovolnými dvěma vrcholy lze vést aspoň  $k$  hranově-disjunktních cest (vrcholy mohou být sdílené).*

*Graf  $G$  je vrcholově  $k$ -souvislý právě když mezi libovolnými dvěma vrcholy lze vést aspoň  $k$  disjunktních cest (různých až na ty dva spojované vrcholy). □*

Věta nám vlastně říká, že stupeň souvislosti grafu se přirozeně rovná stupni redundance spojení vrcholů. Na výše uvedeném obrázku mezi každými dvěma vrcholy prvního grafu můžeme vést až 4 disjunktní cesty.

U druhého grafu třeba mezi levým a pravým koncem lze vést jen 2 (vrcholově) disjunktní cesty, ale mezi každými dvěma vrcholy lze vést 3 hranově-disjunktní cesty.

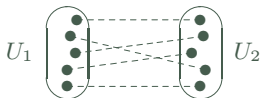
V duchu předchozí Mengerovy věty pokračujeme s následujícími poznatky.

**Věta 2.7.** *Nechť  $G$  je vrcholově 2-souvislý graf. Pak každé dvě hrany  $v$   $G$  leží na společné kružnici.  $\square$*

**Důkaz:** Nechť  $e, f \in E(G)$ . Sestrojíme graf  $G'$  podrozdělením obou hran  $e, f$  novými vrcholy  $v_e, v_f$ . Je zřejmé, že i  $G'$  je vrcholově 2-souvislý graf, takže podle Věty 2.6 existují v  $G'$  dvě disjunktní cesty spojující  $v_e$  s  $v_f$ , tvořící spolu kružnici  $C'$ . Nakonec  $C'$  indukuje v  $G$  kružnici  $C$  procházející  $e$  i  $f$ .  $\square$

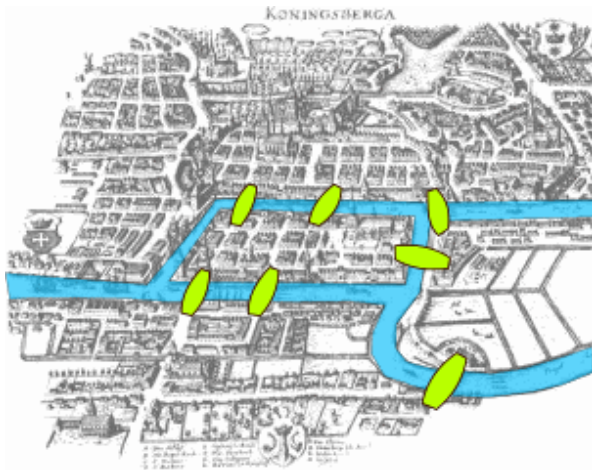
Rozšířením předchozí úvahy lze dokonce dokázat:

**Věta 2.8.** *Nechť  $G$  je vrcholově  $k$ -souvislý graf,  $k \geq 1$ . Pak pro každé dvě disjunktní množiny  $U_1, U_2 \subset V(G)$ ,  $|U_1| = |U_2| = k$  v  $G$  existuje  $k$  po dvou disjunktních cest z vrcholů  $U_1$  do vrcholů  $U_2$ .*



## 2.4 Jedním tahem: Eulerovské grafy

Snad *nejstarší* výsledek teorie grafů vůbec pochází od Leonarda Eulera – jedná se o slavných 7 mostů v Královci / Königsbergu / dnešním Kaliningradě.

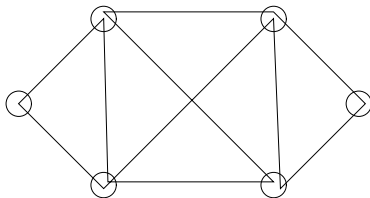
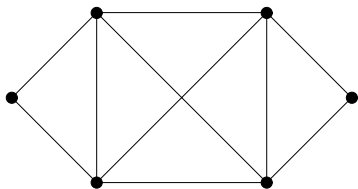


O jaký problém se tehdy jednalo? Městští radní chtěli vědět, zda mohou suchou nohou přejít po každém ze sedmi vyznačených mostů právě jednou.

Rozbor tohoto problému vede k následující definici a odpovědi.

**Definice:** *Tah* je sled v grafu bez opakování hran.

*Uzavřený tah* je tahem, který končí ve vrcholu, ve kterém začal. *Otevřený tah* je tahem, který končí v jiném vrcholu, než ve kterém začal.



*Nejstarší výsledek teorie grafů* od Leonarda Eulera poté zní:  $\square$

**Věta 2.9.** *Graf  $G$  lze nakreslit jedním uzavřeným tahem právě když  $G$  je souvislý a všechny vrcholy v  $G$  jsou sudého stupně.*  $\square$

**Důsledek 2.10.** *Graf  $G$  lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě když  $G$  je souvislý a všechny vrcholy v  $G$  až na dva jsou sudého stupně.*

**Důkaz:** Dokazujeme oba směry ekvivalence. Pokud lze  $G$  nakreslit jedním uzavřeným tahem, tak je zřejmě souvislý a navíc má každý stupeň sudý, neboť uzavřený tah každým průchodem vrcholem „ubere“ dvě hrany.  $\square$

Naopak zvolíme mezi všemi uzavřenými tahy  $T$  v  $G$  ten (jeden z) nejdelší. Tvrdíme, že  $T$  obsahuje všechny hrany grafu  $G$ .

- Pro spor vezměme graf  $G' = G - E(T)$ , o kterém předpokládejme, že je neprázdný. Jelikož  $G'$  má taktéž všechny stupně sudé, je (z indukčního předpokladu) libovolná jeho komponenta  $C \subseteq G'$  nakreslená jedním uzavřeným tahem  $T_C$ .  $\square$
- Vzhledem k souvislosti grafu  $G$  každá komponenta  $C \subseteq G'$  protíná náš tah  $T$  v některém vrchole  $w$ , a tudíž lze oba tahy  $T_C$  a  $T$  „propojit přes  $w$ “. To je spor s naším předpokladem nejdelšího možného  $T$ .  $\square$

$\square$

**Důkaz** důsledku: Nechtě  $u, v$  jsou dva vrcholy grafu  $G$  mající lichý stupeň, neboli dva (předpokládané) konce otevřeného tahu pro  $G$ . Do  $G$  nyní přidáme nový vrchol  $w$  spojený hranami s  $u$  a  $v$ . Tím jsme náš případ převedli na předchozí případ grafu se všemi sudými stupni.  $\square$