9 Krátké povídání o průnikových grafech

Od této lekce teorie grafů se zaměříme lehce na několik vybraných partií teorie grafů blízkých autorovu srdci. . .

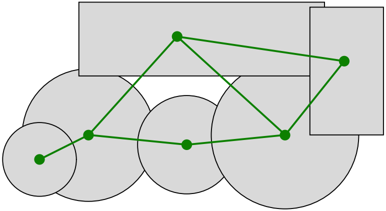
Naším prvním výběrem jsou *průnikové grafy*, což jsou grafy, jejichž vrcholy jsou jisté množiny a hrany spojují pronikající se dvojice. Pochopitelně hlavní motivací studia těchto grafů je jejich geometrická názornost a aplikovatelnost v reálných situacích.

Stručný přehled lekce

- Co jsou průnikové grafy, příklad intervalových grafů.
- Chordální grafy a jejich vlastnosti.
- Některé další třídy průnikových grafů.
- Reprezentace grafů křivkami a úsečkami.

9.1 Průnikové a intervalové grafy

Definice 9.1. **Průnikovým grafem** množinového systému $\mathcal{M}$ nazveme graf $I_{\mathcal{M}}$ na vrch. $V = \mathcal{M}$ s množinou hran $E = \big\{\{A,B\} \subset \mathcal{M} : A \cap B \neq \emptyset\big\}$.



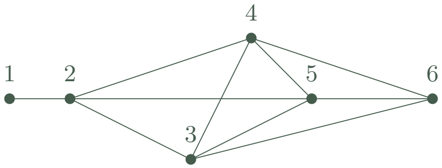
□

Fakt: Průnikové grafy (určitého typu) jsou vždy uzavřené na indukované podgrafy.

Fakt: Každý jednoduchý graf je isomorfní průnikovému grafu nějakého systému množin. Stačí zvolit soubor hran incidentních s vrcholem x za množinu M_x reprezentující x.

Intervalové grafy

Pro začátek se podívejme na průnikové grafy intervalů na přímce – *intervalové grafy* (zkratka INT).



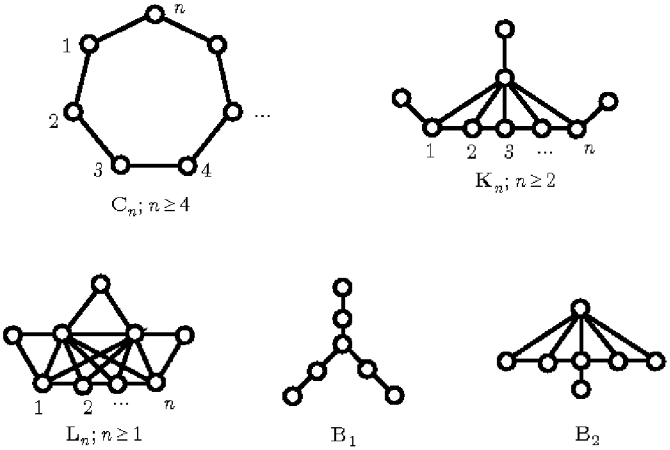
□

Vzpomeňte si, že s intervalovými grafy jsme se vlastně setkali už v Problému 5.5.

Lema 9.2. *Každá kružnice délky větší než tři v intervalovém grafu má chordu.*

Věta 9.3. *Třídu všech intervalových grafů lze charakterizovat pomocí násl. tvrzení.* □

- *Graf je intervalový právě když neobsahuje žádný z následujících zakázaných indukovaných podgrafů:*

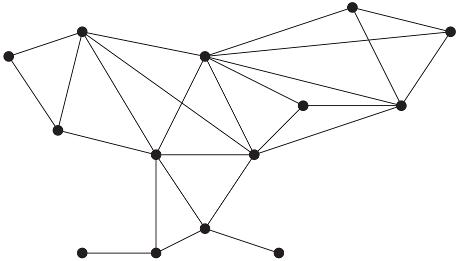


□

- *Graf je intervalový, právě když neobsahuje indukovanou kružnici C_4 a jeho doplněk má tranzitivní orientaci.*

9.2 Chordální grafy

Definice: Graf G je *chordální* pokud neobsahuje indukovanou kružnici delší než tři. Například:



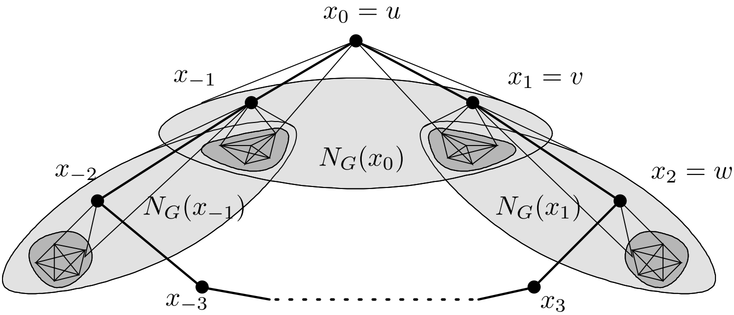
□

Věta 9.4. *Každý chordální graf G obsahuje simpliciální vrchol, tj. vrchol s takový, že všichni sousedé s tvoří kliku v G.* □

Důkaz: Dokazujeme posloupnost tří snadných tvrzení o chordálním grafu G.

Řekneme, že graf H je *bisimpliciální*, pokud H je úplný nebo H obsahuje dva nespojené simpliciální vrcholy.

1. Pro každou kružnici C a hranu e v G existuje hrana f taková, že $C \setminus \{e\} \cup \{f\}$ obsahuje trojúhelník. □
2. Nechť uv je hranou G a sousedé v tvoří (indukují) bisimpliciální podgraf. Pokud v je simpliciální mezi sousedy u, ale ne v celém G, pak existuje vrchol w spojený s v a nespojený s u takový, že w je simpliciální mezi sousedy v.
3. Pokud G není bisimpliciální, ale sousedé každého jeho vrcholu indukují bisimpliciální podgraf, pak G obsahuje kružnici C odporující bodu 1.
4. Tudíž G je bisimpliciální.



□

Přímým důsledkem Věty 9.4 je existence *simpliciální dekompozice* libovolného chordálního grafu; jedná se o seřazení jeho vrcholů do posloupnosti $v_1, v_2, \dots, v_n$ tak, že každé v_i, $i = 2, \dots, n$, je simpliciální v podgrafu indukovaném na $v_1, \dots, v_{i-1}$.

Fakt: Simpliciální dekompozici lze využít k efektivnímu rozpoznávání intervalových i chordálních grafů. □

Věta 9.5. *Graf G je chordální právě když G je průnikovým grafem podstromů ve vhodném stromě.* □

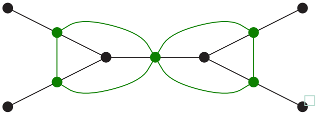
Důkaz (náznak ve směru doprava): Povedeme indukcí podle počtu vrcholů G. Báze pro jeden vrchol je zřejmá. Navíc zřejmě každý průnikový graf podstromů v nějakém stromě musí být chordální.

Jinak nechť v je simpliciální vrchol chordálního grafu G. Indukcí sestrojíme průnikovou reprezentaci také chordálního grafu $G - v$. Pak sousedé v tvoří kliku, tudíž v průnikové reprezentaci grafu $G - v$ se v některém uzlu stromu všichni překrývají. Na tomto místě přidáme nový list stromu, který bude reprezentovat v a bude překryt reprezentanty sousedů v. □

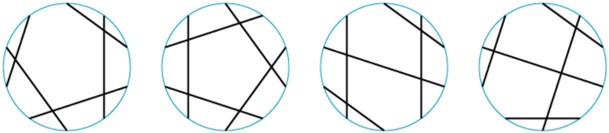
9.3 Třídy průnikových grafů

Zde si uvedeme jen stručný neformální přehled některých typů průnikových grafů, které jsou běžně studovány.

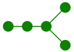
- *Hranový* graf je průnikovým grafem hran v běžném grafu.



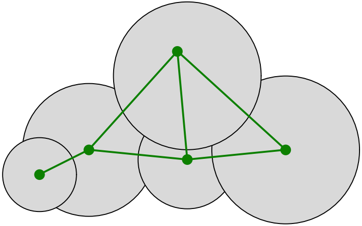
- *Kruhově-intervalové* grafy (CA) jsou průnikovými grafy intervalů na kružnici.
- *Kružnicové* grafy (CIR) jsou průnikovými grafy tětiv v kružnici.



P_4 C_5 P_4

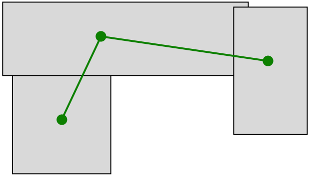


- *Diskové* grafy (DISC) jsou průnikovými grafy kruhů v rovině. Lze uvažovat také jen jednotkové kruhy (unit-DISC).

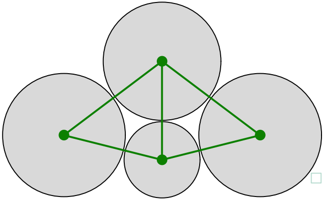


□

- *Kvádrové* grafy (BOX) jsou průnikovými grafy kvádrů ve dvou, třech či více dimenzích, se stěnami rovnoběžnými se souřadnicemi.



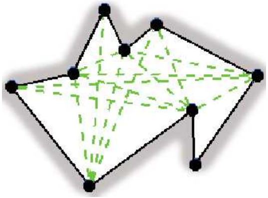
• *Dotykové* . . . grafy jsou variantou průnikových grafů geometrických objektů, ve které se požaduje, aby vnitřky objektů byly po dvou disjunktní.



□

Věta 9.6. (Koebe) *Graf je rovinný právě když je dotykovým grafem kruhů v rovině.* □

• Jiné, tzv. *viditelnostní* grafy nejsou definovány průniky objektů, ale jejich vzájemnou viditelností v geometrickém světě. Použití nacházejí například při plánování cesty autonomního robota.



9.4 Průnikové grafy křivek a úseček

Definice: *Niťovými grafy* nazveme průnikové grafy (obyčejných) křivek v rovině.

Tvrzení 9.7. *Každý rovinný graf je niťový.* □

Tvrzení 9.8. *Existují grafy, které jsou niťové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje dvojici křivek majících exponenciálně mnoho vzájemných průsečíků.* □

Co se týče algoritmické složitosti, je poznání niťových grafů velmi algoritmicky náročné. Vhledem k Tvrzení 9.8 je mnohem obtížnější dokázat příslušnost problému do třídy $\mathcal{NP}$, než jeho těžkost, [Kratochvíl / Pelsmajer, Schaeffer, Štefankovič].

Věta 9.9. *Problém rozpoznat, zda daný graf je niťový, je $\mathcal{NP}$-úplný.* □

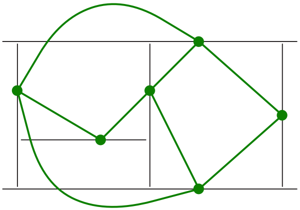
Velmi podobně je definována třída *úsečkových grafů*, což jsou průnikové grafy úseček v rovině. Opět je dokázáno, že jejich rozpoznávání je $\mathcal{NP}$-těžké [Kratochvíl], ale příslušnost problému do třídy $\mathcal{NP}$ zůstává otevřená kvůli následujícímu.

Tvrzení 9.10. *Existují grafy, které jsou úsečkové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje úsečku, k zápisu jejíž souřadnic je třeba exponenciálně mnoho bitů.* □

Hypotéza 9.11. Je každý rovinný graf úsečkovým grafem?

„Zápalkové“ grafy

Výše jsem zmínili obecný pojem geometrických dotykových grafů, nyní se z tohoto úhlu pohledu podíváme na *dotykové grafy úseček* v rovině:
Tímto pojmem nazýváme ty průnikové grafy úseček v rovině, u nichž je dodatečnou podmínkou, že žádné dvě úsečky se neprotínají ve svých vnitřních bodech.
(Jakoby „zápalkové“ reprezentace v rovině.)



□

Věta 9.12. *Graf je dotykovým grafem disjunktních horizontálních a disjunktních vertikálních úseček, právě když se jedná o rovinný bipartitní graf.* □

Opět se jedná o výpočetně obtížnou třídu grafů, neboť již:

Věta 9.13. *Problém rozpoznat dotykový graf úseček je $\mathcal{NP}$-úplný.* □