A **3. písemná práce z M101. Řešte samostatně a pozorně. Nerozumíte-li něčemu v zadání, zeptejte se. $\Re$ značí množinu všech reálných čísel.**

1. (17 bodů) Uvažme lineární zobrazení $f:\Re^4 \to \Re^3$. Víme, že

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}.$$

a) Nejprve spočítejte obrazy $f(\boldsymbol{e}_i)$, kde $\boldsymbol{e}_i$ tvoří kanonickou bázi $\varepsilon_4=\left(e_1=(1,0,0,0)^T,\cdots,e_4=(0,0,0,1)^T\right)$. Užijte toho, že víte, že f je lineární, tj. že $f(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=af(\boldsymbol{x})+bf(\boldsymbol{y})$. Znamená to, že musíte vhodně volit koeficienty a, b z $\Re$ a volit vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ z $\{(1,1,0,0)^T,(0,1,1,0)^T,(1,0,0,1)^T,(0,0,1,0)^T\}$.

b) Pak $f(\boldsymbol{e}_i)$ pro i=1,...,4 postupně tvoří sloupce matice zobrazení $f_{\varepsilon_3\varepsilon_4}$.

c) Najděte předpis tohoto zobrazení.

d) Najděte matici zobrazení $f_{\alpha\varepsilon_4}$, jestliže báze $\alpha=\left((1,0,0)^T,(1,1,0)^T,(1,1,1)^T\right)$. Buď můžete využít násobení matic, pak $f_{\alpha\varepsilon_4}=(id)_{\alpha\varepsilon_3}\cdot f_{\varepsilon_3\varepsilon_4}$, nebo z definice i-tý sloupec je $\left(f(e_i)\right)_\alpha$ a i=1,...,4.

e) Najděte jádro Ker f a obraz Im f. (nejlépe pomocí báze jako podprostor $\Re^4$ a $\Re^3$).

2. (6 bodů) Ve vektorovém prostoru $\Re_2[x]$ polynomů stupně nejvýše 2 s reálnými koeficienty, tj. $\Re_2[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_0,a_1,a_2\in\Re\}$ najděte souřadnice polynomu (vektoru) $1+x+x^2$ v bázi $\beta=\left(1+x^2,1+x,x+x^2\right)$.

3. (7 bodů) Rozhodněte zda $M=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{2,2}(\Re)\;\middle|\; a-b+c+d=0\right\}$ je vektorový podprostor prostoru všech čtvercových matic typu 2×2 $\mathrm{Mat}_{2,2}(\Re)=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\;\middle|\; a,b,c,d\in\Re\right\}$, ve kterém sčítání vektorů je sčítání matic a násobení skalárem je násobení matice reálným číslem. Své tvrzení dokažte. Tedy ověřte všechny tři podmínky a pokud některá z nich neplatí, uveďte protipříklad.

4. (4 body) Výpočtem determinantu rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi $\Re^4$: $(2,3,1,4)^T$, $(1,0,0,0)^T$, $(1,1,1,1)^T$, $(0,0,1,1)^T$.

B **3. písemná práce z M101. Řešte samostatně a pozorně. Nerozumíte-li něčemu v zadání, zeptejte se. $\Re$ značí množinu všech reálných čísel.**

1. (17 bodů) Uvažme lineární zobrazení $f:\Re^4 \to \Re^3$. Víme, že

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}.$$

a) Nejprve spočítejte obrazy $f(\boldsymbol{e}_i)$, kde $\boldsymbol{e}_i$ tvoří kanonickou bázi $\varepsilon_4=\left(e_1=(1,0,0,0)^T,\cdots,e_4=(0,0,0,1)^T\right)$. Užijte toho, že víte, že f je lineární, tj. že $f(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=af(\boldsymbol{x})+bf(\boldsymbol{y})$. Znamená to, že musíte vhodně volit koeficienty a, b z $\Re$ a volit vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ z $\{(1,0,1,0)^T,(1,1,0,0)^T,(0,1,0,1)^T,(0,0,1,0)^T\}$.

b) Pak $f(\boldsymbol{e}_i)$ pro i=1,...,4 postupně tvoří sloupce matice zobrazení $f_{\varepsilon_3\varepsilon_4}$.

c) Najděte předpis tohoto zobrazení.

d) Najděte matici zobrazení $f_{\alpha\varepsilon_4}$, jestliže báze $\alpha=\left((1,0,0)^T,(1,1,0)^T,(1,1,1)^T\right)$. Buď můžete využít násobení matic, pak $f_{\alpha\varepsilon_4}=(id)_{\alpha\varepsilon_3}\cdot f_{\varepsilon_3\varepsilon_4}$, nebo z definice i-tý sloupec je $\left(f(e_i)\right)_\alpha$ a i=1,...,4.

e) Najděte jádro Ker f a obraz Im f. (nejlépe pomocí báze jako podprostor $\Re^4$ a $\Re^3$).

2. (6 bodů) Ve vektorovém prostoru $\Re_2[x]$ polynomů stupně nejvýše 2 s reálnými koeficienty, tj. $\Re_2[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_0,a_1,a_2\in\Re\}$ najděte souřadnice polynomu (vektoru) $1+x+x^2$ v bázi $\beta=\left(1+x^2,2+x,x+x^2\right)$.

3. (7 bodů) Mějme $M=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{2,2}(\Re)\;\middle|\; ad-bc=\det(A)=0\right\}$, rozhodněte zda je M vektorový podprostor prostoru všech čtvercových matic typu 2×2 $\mathrm{Mat}_{2,2}(\Re)=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\;\middle|\; a,b,c,d\in\Re\right\}$, ve kterém sčítání vektorů je sčítání matic a násobení skalárem je násobení matice reálným číslem. Své tvrzení dokažte. Tedy ověřte všechny tři podmínky a pokud některá z nich neplatí, uveďte protipříklad.

4. (4 body) Výpočtem determinantu rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi $\Re^4$: $(2,3,1,4)^T$, $(1,0,0,0)^T$, $(1,1,1,1)^T$, $(0,0,1,1)^T$.

C **3. písemná práce z M101. Řešte samostatně a pozorně. Nerozumíte-li něčemu v zadání, zeptejte se. $\Re$ značí množinu všech reálných čísel.**

1. (17 bodů) Uvažme lineární zobrazení $f:\Re^3 \to \Re^4$. Víme, že

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

a) Nejprve spočítejte obrazy $f(\boldsymbol{e}_i)$, kde $\boldsymbol{e}_i$ tvoří kanonickou bázi $\varepsilon_3=\left(e_1=(1,0,0)^T,\cdots,e_3=(0,0,1)^T\right)$. Užijte toho, že víte, že f je lineární, tj. že $f(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=af(\boldsymbol{x})+bf(\boldsymbol{y})$. Znamená to, že musíte vhodně volit koeficienty a, b z $\Re$ a volit vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ z $\{(1,0,1)^T,(0,1,1)^T,(0,1,0)^T\}$.

b) Pak $f(\boldsymbol{e}_i)$ pro i=1,...,3 postupně tvoří sloupce matice zobrazení $f_{\varepsilon_4\varepsilon_3}$.

c) Najděte předpis tohoto zobrazení.

d) Nechť $\alpha=\left((1,0,0,0)^T,(1,1,0,0)^T,(1,1,1,0)^T,(1,1,1,1)^T\right)$ je báze. Najděte matici zobrazení $f_{\alpha\varepsilon_3}$. Buď můžete využít násobení matic, pak $f_{\alpha\varepsilon_3}=(id)_{\alpha\varepsilon_4}\cdot f_{\varepsilon_4\varepsilon_3}$, nebo z definice i-tý sloupec je $\left(f(e_i)\right)_\alpha$ a i=1,...,3.

e) Najděte jádro Ker f a obraz Im f. (nejlépe pomocí báze jako podprostor $\Re^3$ a $\Re^4$).

2. (6 bodů) Ve vektorovém prostoru $\Re_2[x]$ polynomů stupně nejvýše 2 s reálnými koeficienty, tj. $\Re_2[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_0,a_1,a_2\in\Re\}$ najděte souřadnice polynomu (vektoru) $2+x+2x^2$ v bázi $\beta=\left(1+x^2, 1+x, x+x^2\right)$.

3. (7 bodů) Rozhodněte, zda $M=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{2,2}(\Re) \mid a+b=c+d\right\}$ je vektorový podprostor prostoru všech čtvercových matic typu 2×2 $\mathrm{Mat}_{2,2}(\Re)=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in\Re\right\}$, ve kterém sčítání vektorů je sčítání matic a násobení skalárem je násobení matice reálným číslem. Své tvrzení dokažte. Tedy ověřte všechny tři podmínky a pokud některá z nich neplatí, uveďte protipříklad.

4. (4 body) Výpočtem determinantu rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi $\Re^4$: $(2,3,1,4)^T$, $(1,0,0,0)^T$, $(1,1,1,1)^T$, $(0,0,1,1)^T$.

D **3. písemná práce z M101. Řešte samostatně a pozorně. Nerozumíte-li něčemu v zadání, zeptejte se. $\Re$ značí množinu všech reálných čísel.**

1. (17 bodů) Uvažme lineární zobrazení $f:\Re^3 \to \Re^4$. Víme, že

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\2\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

a) Nejprve spočítejte obrazy $f(\boldsymbol{e}_i)$, kde $\boldsymbol{e}_i$ tvoří kanonickou bázi $\varepsilon_3=\left(e_1=(1,0,0)^T,\cdots,e_3=(0,0,1)^T\right)$. Užijte toho, že víte, že f je lineární, tj. že $f(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=af(\boldsymbol{x})+bf(\boldsymbol{y})$. Znamená to, že musíte vhodně volit koeficienty a, b z $\Re$ a volit vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ z $\{(1,1,1)^T,(0,1,1)^T,(0,0,1)^T\}$.

b) Pak $f(\boldsymbol{e}_i)$ pro i=1,...,3 postupně tvoří sloupce matice zobrazení $f_{\varepsilon_4\varepsilon_3}$.

c) Najděte předpis tohoto zobrazení.

d) Nechť $\alpha=\left((1,0,0,0)^T,(1,1,0,0)^T,(1,1,1,0)^T,(1,1,1,1)^T\right)$ je báze. Najděte matici zobrazení $f_{\alpha\varepsilon_3}$. Buď můžete využít násobení matic, pak $f_{\alpha\varepsilon_3}=(id)_{\alpha\varepsilon_4}\cdot f_{\varepsilon_4\varepsilon_3}$, nebo z definice i-tý sloupec je $\left(f(e_i)\right)_\alpha$ a i=1,...,3.

e) Najděte jádro Ker f a obraz Im f. (nejlépe pomocí báze jako podprostor $\Re^3$ a $\Re^4$).

2. (6 bodů) Ve vektorovém prostoru $\Re_2[x]$ polynomů stupně nejvýše 2 s reálnými koeficienty, tj. $\Re_2[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_0,a_1,a_2\in\Re\}$ najděte souřadnice polynomu (vektoru) $2+x+2x^2$ v bázi $\beta=\left(2+x^2, 2+x, 2x+x^2\right)$.

3. (7 bodů) Rozhodněte, zda $M=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{2,2}(\Re) \mid ab=cd\right\}$ je vektorový podprostor prostoru všech čtvercových matic typu 2×2 $\mathrm{Mat}_{2,2}(\Re)=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in\Re\right\}$, ve kterém sčítání vektorů je sčítání matic a násobení skalárem je násobení matice reálným číslem. Své tvrzení dokažte. Tedy ověřte všechny tři podmínky a pokud některá z nich neplatí, uveďte protipříklad.

4. (4 body) Výpočtem determinantu rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi $\Re^4$: $(2,3,1,4)^T$, $(1,0,0,0)^T$, $(1,1,1,1)^T$, $(0,0,1,1)^T$.