

**1.8. Definice.** Necht'  $A = (a_{ij})$  je čtvercová matice řádu  $n$ ; necht' je zvoleno  $k$  jejích řádků a sloupců  $k < n$  a  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ . Pak matice

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

se nazývá *submatice matice A* určená řádky  $i_1, \dots, i_k$  a sloupci  $j_1, \dots, j_k$ . Její determinant  $\det M$  se nazývá *minor řádu k* matice  $A$ .

Zbývajících  $(n - k)$  řádky a  $(n - k)$  sloupců je určena tzv. *doplňková submatice*  $\overline{M}$  k submatici  $M$  a její determinant  $\det \overline{M}$  se nazývá *doplňek minoru*  $\det M$ .

Označme  $s_M = i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k$ . Pak číslo  $(-1)^{s_M} \det \overline{M}$  se nazývá *algebraický doplněk* minoru  $\det M$ .

**1.9. Věta.** (*Laplaceova věta*) Necht'  $A = (a_{ij})$  je čtvercová matice řádu  $n$ , necht' je pevně zvoleno  $k$  řádků matice  $A$ , kde  $0 < k < n$ . Pak determinant matice  $A$  je roven součtu všech  $\binom{n}{k}$  součinů minorů řádu  $k$ , vybraných ze zvolených  $k$  řádků, s jejich algebraickými doplňky.

## Řešené příklady

**Úloha 1:** Spočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) převedením na schodovitý tvar pomocí elementárních úprav, které nemění hodnotu determinantu  
 (b) užitím Laplaceovy věty

**Řešení:** (a) Převedeme na schodovitý tvar. Nejprve ke třetímu řádku přičteme -1 násobek prvního řádku a ke čtvrtému řádku přičteme -2 násobek prvního řádku. Pak ke čtvrtému řádku přičteme  $\frac{3}{2}$  násobek druhého řádku.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

Nyní přičteme ke čtvrtému řádku 5 násobek třetího řádku, čímž dostáváme schodovitý tvar a determinant se rovná součinu prvků na hlavní diagonále.

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

(b) Uděláme Laplaceův rozvoj podle prvního řádku:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{4+1} 1 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(-9 - 3 - 2) - (-9 - 4 - 2) = 1$$

**Úloha 2:** Rozvojem podle více řádků určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Řešení:** Vybereme si první a druhý řádek, protože tyto řádky obsahují nejvíce nul. V rozvoji pak musíme postupně procházet všechny dvojice sloupců. Vidíme, že všechny členy determinantu kromě druhého jsou nulové a výpočet se tedy velmi zjednoduší.

$$\det(A) = (-1)^{1+2+1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+1+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+1+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+2+3}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+3+4} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^7 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1 - 6) \cdot (-2 + 1) = -7$$

**Úloha 3:** Spočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n+1 & 0 \end{pmatrix}$$

řádu  $n$ .

**Řešení:** Ke všem řádkům přičteme první řádek

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n+1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 2.3 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} = n!$$

**Úloha 4:** Odvoďte rekurentní vztah pro výpočet determinantu matice

$$A_n = \begin{pmatrix} x+y & xy & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{pmatrix}$$

řádu  $n$ .

**Řešení:** Uděláme Laplaceův rozvoj podle prvního sloupce

$$\det A_n = (x+y) \det \begin{pmatrix} x+y & xy & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} xy & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{pmatrix}.$$

První matice je vlastně shodná s původní maticí, pouze je o řád menší. U druhé matice provedeme Laplaceův rozvoj podle prvního řádku. Pak dostáváme

$$\det A_n = (x + y) \det A_{n-1} - xy \det A_{n-2}.$$

**Úloha 5:** Určete determinant matice řádu  $n$  (tzv. Vandermondův determinant).

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

**Řešení:** Od každého sloupce, kromě prvního, odečteme  $x_1$  násobek předchozího sloupce. Budeme postupovat od posledního sloupce až ke druhému.

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & \dots & x_2^{n-2} - x_1x_2^{n-3} & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1x_n & \dots & x_n^{n-2} - x_1x_n^{n-3} & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Nyní uděláme Laplaceův rozvoj podle prvního řádku a jednotlivé prvky determinantu upravíme vytýkáním.

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_3^{n-3}(x_3 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-3}(x_n - x_1) & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{pmatrix}$$

Vytknemeli z každého řádku, zůstane nám determinant, který je Vandermondův determinant řádu  $n - 1$  s parametry  $x_2, \dots, x_n$ .

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-3} & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

A tedy

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) V_{n-1}(x_2, \dots, x_n)$$

Tím jsme získali rekurentní formuli, která platí pro  $n > 1$ . Indukcí teď snadno nahlédneme výsledné řešení.

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2) \dots \dots (x_n - x_{n-1})$$

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

---

## Cvičení

1. Spočítejte počet inverzí v dané permutaci:

(a)  $(2, 1, 7, 9, 8, 6, 5, 3, 4)$

(b)  $(9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$

2. Určete paritu následujících permutací:

(a)  $(4, 6, 1, 5, 3, 2)$

(b)  $(6, 3, 1, 2, 4, 5)$

(c)  $(3, 7, 6, 2, 4, 1, 5)$

(d)  $(4, 1, 3, 7, 2, 5, 6)$

3. Určete  $x, y$  tak, aby pořadí

(a)  $(1, 2, 7, 4, x, 5, 6, y, 9)$  bylo sudé.

(b)  $(5, 1, y, 8, 9, 4, x, 6, 3)$  bylo liché.

4. Zjistěte paritu následujících permutací.

(a)  $(n, n - 1, \dots, 2, 1)$

(b)  $(1, 3, 5, \dots, 2n - 3, 2n - 1, 2, 4, \dots, 2n)$

(c)  $(2, 4, 6, \dots, 2(n - 1), 2n, 1, 3, \dots, 2n - 1)$

(d)  $(2, 5, 8, \dots, 3n - 1, 1, 4, 7, \dots, 3n - 2, 3, 6, 9, \dots, 3n)$

(e)  $(2, 1, 4, 3, \dots, 2n, 2n - 1)$

5. Rozhodněte, zda se daný součin vyskytuje v determinantu matice  $A$  řádu  $n$ .

(a)  $n = 6, a_{31} a_{43} a_{14} a_{52} a_{66} a_{25}$

(b)  $n = 8, a_{72} a_{17} a_{43} a_{21} a_{64} a_{35} a_{56}$

6. Určete všechny členy determinantu matice  $A$  řádu 4, které obsahují prvky  $a_{12}, a_{34}$ .

7. Spočítejte determinant matice podle definice.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & i \end{pmatrix}$$

8. Spočítejte determinant úpravou na schodovitý tvar.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -3 & -7 \\ -3 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & -4 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

9. Spočítejte determinant matice pouze užitím Laplaceovy věty a definice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Spočítejte determinant řádu  $n > 1$ .

$$A = \begin{pmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ x & a & x & \dots & x & x \\ x & x & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{pmatrix}$$

11. Spočítejte determinant matice řádu  $n > 1$  úpravou na schodovitý tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & a-1 & a \\ -1 & 0 & 3 & \dots & a-1 & a \\ -1 & -2 & 0 & \dots & a-1 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{2(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{pmatrix}$$

12. Odvoďte rekurentní vztah pro výpočet determinantu matice.

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} \quad B_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_n = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E_n = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad F_n = \begin{pmatrix} x+1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+1 \end{pmatrix}$$

$$G_{2n} = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 & y \\ 0 & x & \dots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & y & \dots & x & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix} \quad H_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Řešte rovnici:

$$(a) \det \begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ 2-x & 5 \end{pmatrix} = 3 \quad (b) \det \begin{pmatrix} \sin x & -3 \cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} = 2 \sin^2 - \frac{x}{2}$$

14. Spočítejte determinant (užijte postupu z úlohy 5).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 8 & 1 & -8 & 27 & -1 \\ 16 & 1 & 16 & 81 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 + 1 & x_2 + 1 & \dots & x_n + 1 \\ x_1^2 + x_1 & x_2^2 + x_2 & \dots & x_n^2 + x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} + x_1^{n-2} & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

15. Laplaceovým rozvojem podle třetího sloupce spočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

16. Vyjádřete polynom stupně  $n$  pomocí determinantu stupně  $n - 1$ . (Využijte výsledku předchozího příkladu.)