Zkouška MB101, úterý 13.1.2009, 8:00–10:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** V cukrárně vybíráme 3 kopečky zmrzliny z 6 druhů.
(a) Nejprve vybíráme do kornoutu, kde jsou kopečky umísťovány postupně jeden na druhý. Určete počet různých takto vytvořených zmrzlinových kornoutů, jestliže se již vybraný druh zmrzliny nemůže opakovat resp. může opakovat.
(b) Dále vybíráme do misky, kam jsou kopečky umísťovány bez ohledu na pořadí. Určete počet různých takto vytvořených misek se zmrzlinou, jestliže se již vybraný druh zmrzliny nemůže opakovat resp. může opakovat.

2. (3 body) **Náhodné jevy.**
(a) Napište definici nezávislosti náhodných jevů A a B.
(b) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.
(c) Házíme dvakrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že padne součet alespoň 5 za podmínky, že na první kostce padlo číslo 2.

3. (3 body) **Elementární geometrie.** Určete matice následujících lineárních zobrazení v prostoru $\mathbb{R}^2$:
(a) otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru,
(b) zrcadlení vzhledem k ose x,
(c) projekce na osu x,
(d) složené zobrazení otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru a poté zrcadlení vzhledem k ose x,
(e) složené zobrazení projekce na osu x a poté otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru,
(f) složené zobrazení projekce na osu x a poté otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru a poté zrcadlení vzhledem k ose x.

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Metodou Gaussovy eliminace vyřešte lineární systém

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 13, \\ 2x_1 & - & x_2 & & & = & 9, \\ x_1 & + & x_2 & + & r\,x_3 & = & 3, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2, \end{array}$$

a proveďte diskusi řešení vzhledem k hodnotám parametru $r \in \mathbb{R}$.

5. (3 body) **Determinant.** Výpočtem determinantu (jinou metodu neuznám) rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů ($t \in \mathbb{R}$ je parametr):

$$u_1 = \begin{pmatrix} t & 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u_4 = \begin{pmatrix} t & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. (4 body) **Vektorové prostory.**
(a) Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ matic řádu 2 a v něm množinu U takových matic, které mají součet prvků v každém jednotlivém řádku roven 0 a současně mají součet prvků v každém jednotlivém sloupci roven 0. Určete, jestli je U vektorový podprostor v prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ a pokud ano, určete nějakou jeho bázi a jeho dimenzi.
(b) Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_{3\times 3}$ matic řádu 3 a v něm množinu V takových matic, které mají součin prvků v každém jednotlivém řádku roven 0 a současně mají součin prvků v každém jednotlivém sloupci roven 0. Určete, jestli je V vektorový podprostor v prostoru $\mathrm{Mat}_{3\times 3}$ a pokud ano, určete nějakou jeho bázi a jeho dimenzi.

7. (5 bodů) **Vlastní hodnoty.** Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(včetně báze a dimenze příslušných vlastních podprostorů). Pomocí vlastních hodnot určete determinant matice A matice A a determinant matice A^{-1} (pokud A^{-1} existuje).

8. (4 body) **Iterované procesy.** Brněnská oblast má cca 400 tisíc obyvatel, což zahrnuje vlastní město a předměstí. Analyzujte změny v městské a příměstské populaci (a jejich dlouhodobý efekt), jestliže se každý rok přestěhuje 15% městské populace do předměstí a 5% příměstské populace do města.

FI: PODZIM 2008 $\boxed{1}$ **Skupina B**

Zkouška MB101, úterý 13.1.2009, 8:00–10:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** V cukrárně vybíráme 3 kopečky zmrzliny z 7 druhů.
(a) Nejprve vybíráme do kornoutu, kde jsou kopečky umísťovány postupně jeden na druhý. Určete počet různých takto vytvořených zmrzlinových kornoutů, jestliže se již vybraný druh zmrzliny nemůže opakovat resp. může opakovat.
(b) Dále vybíráme do misky, kam jsou kopečky umísťovány bez ohledu na pořadí. Určete počet různých takto vytvořených misek se zmrzlinou, jestliže se již vybraný druh zmrzliny nemůže opakovat resp. může opakovat.

2. (3 body) **Náhodné jevy.**
(a) Napište definici nezávislosti náhodných jevů A a B.
(b) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.
(c) Házíme dvakrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že padne součet alespoň 6 za podmínky, že na první kostce padlo číslo 3.

3. (3 body) **Elementární geometrie.** Určete matice následujících lineárních zobrazení v prostoru $\mathbb{R}^2$:
(a) otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru,
(b) zrcadlení vzhledem k ose y,
(c) projekce na osu y,
(d) složené zobrazení otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru a poté zrcadlení vzhledem k ose y,
(e) složené zobrazení projekce na osu y a poté otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru,
(f) složené zobrazení projekce na osu y a poté otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru a poté zrcadlení vzhledem k ose y.

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Metodou Gaussovy eliminace vyřešte lineární systém

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 8, \\ 2x_1 & - & x_2 & & & = & -6, \\ x_1 & + & x_2 & + & r\,x_3 & = & 3, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 7, \end{array}$$

a proveďte diskusi řešení vzhledem k hodnotám parametru $r \in \mathbb{R}$.

5. (3 body) **Determinant.** Výpočtem determinantu (jinou metodu neuznám) rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů ($t \in \mathbb{R}$ je parametr):

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & t \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u_4 = \begin{pmatrix} 2 & t & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. (4 body) **Vektorové prostory.**
(a) Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ matic řádu 2 a v něm množinu U takových matic, které mají součin prvků v každém jednotlivém řádku roven 0 a současně mají součin prvků v každém jednotlivém sloupci roven 0. Určete, jestli je U vektorový podprostor v prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ a pokud ano, určete nějakou jeho bázi a jeho dimenzi.
(b) Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_{3\times 3}$ matic řádu 3 a v něm množinu V takových matic, které mají součet prvků v každém jednotlivém řádku roven 0 a současně mají součet prvků v každém jednotlivém sloupci roven 0. Určete, jestli je V vektorový podprostor v prostoru $\mathrm{Mat}_{3\times 3}$ a pokud ano, určete nějakou jeho bázi a jeho dimenzi.

7. (5 bodů) **Vlastní hodnoty.** Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(včetně báze a dimenze příslušných vlastních podprostorů). Pomocí vlastních hodnot určete determinant matice B matice A a determinant matice B^{-1} (pokud B^{-1} existuje).

8. (4 body) **Iterované procesy.** Brněnská oblast má cca 400 tisíc obyvatel, což zahrnuje vlastní město a předměstí. Analyzujte změny v městské a příměstské populaci (a jejich dlouhodobý efekt), jestliže se každý rok přestěhuje 10% městské populace do předměstí a 10% příměstské populace do města.

Zkouška MB101, úterý 13.1.2009, 8:00–10:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** V cukrárně vybíráme 3 kopečky zmrzliny z 8 druhů.
- (a) Nejprve vybíráme do kornoutu, kde jsou kopečky umísťovány postupně jeden na druhý. Určete počet různých takto vytvořených zmrzlinových kornoutů, jestliže se již vybraný druh zmrzliny nemůže opakovat resp. může opakovat.
- (b) Dále vybíráme do misky, kam jsou kopečky umísťovány bez ohledu na pořadí. Určete počet různých takto vytvořených misek se zmrzlinou, jestliže se již vybraný druh zmrzliny nemůže opakovat resp. může opakovat.

2. (3 body) **Náhodné jevy.**
- (a) Napište definici nezávislosti náhodných jevů A a B.
- (b) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.
- (c) Házíme dvakrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že padne součet alespoň 7 za podmínky, že na první kostce padlo číslo 4.

3. (3 body) **Elementární geometrie.** Určete matice následujících lineárních zobrazení v prostoru $\mathbb{R}^2$:
- (a) otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru,
- (b) zrcadlení vzhledem k ose x,
- (c) projekce na osu x,
- (d) složené zobrazení otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru a poté zrcadlení vzhledem k ose x,
- (e) složené zobrazení projekce na osu x a poté otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru,
- (f) složené zobrazení projekce na osu x a poté otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru a poté zrcadlení vzhledem k ose x.

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Metodou Gaussovy eliminace vyřešte lineární systém

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 9, \\ 2x_1 & - & x_2 & & & = & -3, \\ x_1 & + & x_2 & + & r\,x_3 & = & 3, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 6, \end{array}$$

a proveďte diskusi řešení vzhledem k hodnotám parametru $r \in \mathbb{R}$.

5. (3 body) **Determinant.** Výpočtem determinantu (jinou metodu neuznám) rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů ($t \in \mathbb{R}$ je parametr):

$$u_1 = \begin{pmatrix} t & 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & t & 4 \end{pmatrix}.$$

6. (4 body) **Vektorové prostory.**
- (a) Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_{2\times2}$ matic řádu 2 a v něm množinu U takových matic, které mají součet prvků v každém jednotlivém řádku roven 0 a současně mají součet prvků v každém jednotlivém sloupci roven 0. Určete, jestli je U vektorový podprostor v prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times2}$ a pokud ano, určete nějakou jeho bázi a jeho dimenzi.
- (b) Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_{3\times3}$ matic řádu 3 a v něm množinu V takových matic, které mají součin prvků v každém jednotlivém řádku roven 0 a současně mají součin prvků v každém jednotlivém sloupci roven 0. Určete, jestli je V vektorový podprostor v prostoru $\mathrm{Mat}_{3\times3}$ a pokud ano, určete nějakou jeho bázi a jeho dimenzi.

7. (5 bodů) **Vlastní hodnoty.** Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(včetně báze a dimenze příslušných vlastních podprostorů). Pomocí vlastních hodnot určete determinant matice C matice A a determinant matice C^{-1} (pokud C^{-1} existuje).

8. (4 body) **Iterované procesy.** Brněnská oblast má cca 400 tisíc obyvatel, což zahrnuje vlastní město a předměstí. Analyzujte změny v městské a příměstské populaci (a jejich dlouhodobý efekt), jestliže se každý rok přestěhuje 25% městské populace do předměstí a 15% příměstské populace do města.

Zkouška MB101, úterý 13.1.2009, 8:00–10:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** V cukrárně vybíráme 3 kopečky zmrzliny z 9 druhů.
 (a) Nejprve vybíráme do kornoutu, kde jsou kopečky umísťovány postupně jeden na druhý. Určete počet různých takto vytvořených zmrzlinových kornoutů, jestliže se již vybraný druh zmrzliny nemůže opakovat resp. může opakovat.
 (b) Dále vybíráme do misky, kam jsou kopečky umísťovány bez ohledu na pořadí. Určete počet různých takto vytvořených misek se zmrzlinou, jestliže se již vybraný druh zmrzliny nemůže opakovat resp. může opakovat.

2. (3 body) **Náhodné jevy.**
 (a) Napište definici nezávislosti náhodných jevů A a B.
 (b) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.
 (c) Házíme dvakrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že padne součet alespoň 8 za podmínky, že na první kostce padlo číslo 5.

3. (3 body) **Elementární geometrie.** Určete matice následujících lineárních zobrazení v prostoru $\mathbb{R}^2$:
 (a) otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru,
 (b) zrcadlení vzhledem k ose y,
 (c) projekce na osu y,
 (d) složené zobrazení otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru a poté zrcadlení vzhledem k ose y,
 (e) složené zobrazení projekce na osu y a poté otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru,
 (f) složené zobrazení projekce na osu y a poté otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru a poté zrcadlení vzhledem k ose y.

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Metodou Gaussovy eliminace vyřešte lineární systém

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 12, \\ 2x_1 - x_2 \phantom{{}+ rx_3} &= 6, \\ x_1 + x_2 + r\,x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3, \end{aligned}$$

a proveďte diskusi řešení vzhledem k hodnotám parametru $r \in \mathbb{R}$.

5. (3 body) **Determinant.** Výpočtem determinantu (jinou metodu neuznám) rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů ($t \in \mathbb{R}$ je parametr):

$$u_1 = \begin{pmatrix} t & t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u_4 = \begin{pmatrix} t & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. (4 body) **Vektorové prostory.**
 (a) Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_{2\times2}$ matic řádu 2 a v něm množinu U takových matic, které mají součin prvků v každém jednotlivém řádku roven 0 a současně mají součin prvků v každém jednotlivém sloupci roven 0. Určete, jestli je U vektorový podprostor v prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times2}$ a pokud ano, určete nějakou jeho bázi a jeho dimenzi.
 (b) Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_{3\times3}$ matic řádu 3 a v něm množinu V takových matic, které mají součet prvků v každém jednotlivém řádku roven 0 a současně mají součet prvků v každém jednotlivém sloupci roven 0. Určete, jestli je V vektorový podprostor v prostoru $\mathrm{Mat}_{3\times3}$ a pokud ano, určete nějakou jeho bázi a jeho dimenzi.

7. (5 bodů) **Vlastní hodnoty.** Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(včetně báze a dimenze příslušných vlastních podprostorů). Pomocí vlastních hodnot určete determinant matice D matice A a determinant matice D^{-1} (pokud D^{-1} existuje).

8. (4 body) **Iterované procesy.** Brněnská oblast má cca 400 tisíc obyvatel, což zahrnuje vlastní město a předměstí. Analyzujte změny v městské a příměstské populaci (a jejich dlouhodobý efekt), jestliže se každý rok přestěhuje 10% městské populace do předměstí a 5% příměstské populace do města.