FI: PODZIM 2008 $\boxed{3}$ **Skupina A**

Zkouška MB101, středa 4.2.2009, 8:00–10:00 hodin

1. (2 body) **Kombinatorika.** Máme k dispozici písmena A, A, A, E, I, K, M, M, T, T. Určete kolik různých desetipísmenných slov (nemusí dávat smysl) lze z těchto písmen poskládat? Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném složení vznikne slovo MATEMATIKA?

2. (4 body) **Náhodné jevy a pravděpodobnost.** Házíme třemi kostkami současně. Označme náhodné jevy

A = na všech kostkách padne sudé číslo,
B = padne součet 8,
C = na všech kostkách padne nejvýše čtyřka.

Určete pravděpodobnosti náhodných jevů A a B a C, jejich společného nastoupení, jejich sjednocení.

3. (3 body) **Relace.** Uvažujme množinu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ na ní dvě relace:

R := $[a, b]$ patří do relace R, pokud je součet $a + b$ sudé číslo,
S := $[a, b]$ patří do relace S, pokud je součin $a \cdot b$ liché číslo.

Určete, jestli jsou tyto dvě relace reflexivní, symetrické, antisymetrické, tranzitivní, ekvivalence, uspořádání.

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Určete nejlepší lineární aproximaci (regresní přímku) a kvadratickou aproximaci následujících dat:

$$[-1, -1], \quad [0, 0], \quad [1, 0], \quad [2, 2].$$

5. (4 body) **Determinant.** Vypočtěte následující determinanty

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

6. (4 body) **Vlastní hodnoty.** Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(včetně báze a dimenze příslušných vlastních podprostorů). Pomocí vlastních hodnot určete determinant matice A.

7. (4 body) **Vektorové prostory.**

(a) Definujte pojmy báze a dimenze (konečněrozměrného) vektorového prostoru.
(b) Pomocí Gram–Schmidtova procesu určete ortogonální bázi $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$, která je složena z vlastních vektorů matice A z Příkladu 6.
(c) Určete souřadnice vektoru $u = (1, 2, 9)$ vzhledem k této ortogonální bázi $\underline{v}$.

8. (5 bodů) **Iterované procesy.** Předpokládejme, že v populačním modelu dravec–kořist (sova–veverka) je vztah mezi počtem sov (S_k) a veverek (V_k) v daném a následujícím měsíci následovný:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 0.4\, S_k + 0.6\, V_k, \\ V_{k+1} &= -0.3\, S_k + 1.3\, V_k, \end{aligned}$$

přičemž počáteční počet sov a veverek je $S_0 = 50$ a $V_0 = 60$. Pomocí tohoto modelu analyzujte stav této populace z dlouhodobého hlediska.

FI: PODZIM 2008 $\boxed{3}$ **Skupina B**

Zkouška MB101, středa 4.2.2009, 8:00–10:00 hodin

1. (2 body) **Kombinatorika.** Máme k dispozici písmena A, A, A, E, I, K, M, M, T, T. Určete kolik různých desetipísmenných slov (nemusí dávat smysl) lze z těchto písmen poskládat? Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném složení vznikne slovo MATEMATIKA?

2. (4 body) **Náhodné jevy a pravděpodobnost.** Házíme třemi kostkami současně. Označme náhodné jevy

A = na všech kostkách padne liché číslo,
B = padne součet 7,
C = na všech kostkách padne alespoň trojka.

Určete pravděpodobnosti náhodných jevů A a B a C, jejich společného nastoupení, jejich sjednocení.

3. (3 body) **Relace.** Uvažujme množinu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ na ní dvě relace:

S := $[a, b]$ patří do relace S, pokud je součet $a + b$ sudé číslo,
R := $[a, b]$ patří do relace R, pokud je součin $a \cdot b$ liché číslo.

Určete, jestli jsou tyto dvě relace reflexivní, symetrické, antisymetrické, tranzitivní, ekvivalence, uspořádání.

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Určete nejlepší lineární aproximaci (regresní přímku) a kvadratickou aproximaci následujících dat:

$$[-1, -1], \quad [0, 0], \quad [1, 0], \quad [2, 2].$$

5. (4 body) **Determinant.** Vypočtěte následující determinanty

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. (4 body) **Vlastní hodnoty.** Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(včetně báze a dimenze příslušných vlastních podprostorů). Pomocí vlastních hodnot určete determinant matice B.

7. (4 body) **Vektorové prostory.**

(a) Definujte pojmy báze a dimenze (konečněrozměrného) vektorového prostoru.
(b) Pomocí Gram–Schmidtova procesu určete ortogonální bázi $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$, která je složena z vlastních vektorů matice B z Příkladu 6.
(c) Určete souřadnice vektoru $u = (1, 2, 9)$ vzhledem k této ortogonální bázi $\underline{v}$.

8. (5 bodů) **Iterované procesy.** Předpokládejme, že v populačním modelu dravec–kořist (sova–veverka) je vztah mezi počtem sov (S_k) a veverek (V_k) v daném a následujícím měsíci následovný:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 0.4\, S_k + 0.6\, V_k, \\ V_{k+1} &= -0.3\, S_k + 1.3\, V_k, \end{aligned}$$

přičemž počáteční počet sov a veverek je $S_0 = 60$ a $V_0 = 80$. Pomocí tohoto modelu analyzujte stav této populace z dlouhodobého hlediska.