MB101 – dobrovolné domácí úkoly
Vl. čísla, vl. vektory, výpočet kolmé projekce

1. V $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální doplněk podprostoru

$$W = Span\langle(-1,2,0,1),(3,1,-2,4),(-4,1,2,-4)\rangle.$$

2. Pomocí Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru

$$V = Span\langle(1,1,1,1),(1,2,1,0),(1,1,2,3),(0,1,0,0)\rangle.$$

3. Vypočítejte kolmou projekci vektoru $(3,1)$ na prostor $Span\langle(1,0)\rangle$.

4. Vypočítejte kolmou projekci vektoru $(1,-1,2,1)$ na prostor

$$V = Span\langle(1,2,1,0),(-1,0,1,0),(1,-1,1,0)\rangle.$$

5. Nalezněte vlastní čísla matice A, určete jejich algebraickou a geometrickou násobnost a najděte nějaké báze příslušných vlastních prostorů. Zjistěte, zda je matice A podobná nějaké diagonální matici. Pokud ano, určete matici P takovou, že $A = PDP^{-1}$, kde D je ona diagonální matice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Nalezněte vlastní čísla matice A, určete jejich algebraickou a geometrickou násobnost a najděte nějaké báze příslušných vlastních prostorů.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky

1. $W^{\perp} = Span\langle(4,2,7,0)\rangle$. 2. $[\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{12}}(-3,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-2,1)]$ 3. (3,0) 4. (1,-1,2,0) 5. Matice má vlastní číslo 1 algebraické a geometrické násobnosti 1 a vlastní číslo 2 algebraické a geometrické násobnosti 2. Platí například: $Eigen(1) = Span\langle(1,1,1)\rangle$ a $Eigen(2) = Span\langle(1,0,1),(-1,1,0)\rangle$. Pokud za matici P vezmeme například matici tvořenou bázovými vektory těchto vlastních prostorů (v uvedeném pořadí), pak získáváme diagonální matici D, která má na diagonále hodnoty 1,2,2 (v tomto pořadí). 6. Matice má jediné vlastní číslo 2 algebraické násobnosti 4 a geometrické násobnosti 2. $Eigen(2) = Span\langle(2,0,0,1),(0,1,0,0)\rangle$.