4. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Příklad: Řešte systém rovnic v $\mathbf{R}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Řešení: Rozšířená matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 & | & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Pomocí EŘO (elementárních řádkových operací) upravujeme na schodovitý tvar. Poslední řádek matice dáme na první místo, potom jeho (-2)-násobek přičteme k původnímu prvnímu řádku, který posuneme na druhé místo, a jeho (-3)-násobek přičteme k původnímu druhému řádku, který posuneme na třetí místo. Tak dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 & | & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & | & -3 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & | & -6 \end{pmatrix}$$

Přičtením (-1)-násobku druhého řádku k třetímu dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 & | & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -3 \end{pmatrix}$$

Už z tohoto tvaru vidíme, že soustava odpovídající poslední matici nemá řešení, jelikož obsahuje rovnici $0 = -3$. Tedy ani původní soustava (přestože obsahuje více neznámých než rovnic) nemá řešení.

Příklad: Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -9 \end{aligned}$$

tří rovnic o třech neznámých nad polem $\mathbf{R}$.

Řešení: Rozšířená matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & | & 1 \\ 3 & 5 & 4 & | & 10 \\ 1 & -2 & 2 & | & -9 \end{pmatrix}.$$

Pomocí EŘO upravujeme na redukovaný schodovitý tvar. Třetí řádek dáme na první místo. Jeho (-1)-násobek přičteme k původnímu prvnímu řádku, který dáme na druhé místo, a jeho (-3)-násobek přičteme k původnímu druhému rádku, který nýní dáme na třetí místo.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -9 \\ 0 & 11 & -2 & | & 37 \\ 0 & 11 & -2 & | & 37 \end{pmatrix}.$$

(-2)-násobek druhého řádku přičteme k (11)-násobku prvního řádku a jeho (-1)-násobek přičteme ke třetímu řádku. Výsledná matice už je v redukovaném schodovitém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 18 & | & -25 \\ 0 & 11 & -2 & | & 37 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice odpovídá soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 11x_1 + 18x_3 &= -25 \\ 11x_2 - 2x_3 &= 37, \end{aligned}$$

která je ekvivalentní s původní soustavou. Proměnnou x_3 si zvolíme za parametr $t \in \mathbf{R}$. Z první rovnice určíme x_1:

$$11x_1 + 18t = -25 \Rightarrow 11x_1 = -25 - 18t \Rightarrow x_1 = \frac{-25 - 18t}{11}.$$

Z druhé rovnice určíme x_2:

$$11x_2 - 2t = 37 \Rightarrow 11x_2 = 37 + 2t \Rightarrow x_2 = \frac{37 + 2t}{11}.$$

Vidíme, že původní soustava (přestože počet rovnic je stejný jako počet neznámých) má nekočně mnoho řešení.

Příklad: Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

čtyř rovnic o čtyřech neznámých nad polem $\mathbf{Z_5}$.

Řešení: Protože se jedná o homogenní soustamu, stačí upravovat její (nerozšířenou) matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(-2)-násobek, tj. 3-násobek prvního řádku přičteme k druhému řádku a jeho (-1)-násobek, tj. 4-násobek přičteme k třetímu řádku. Dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(-1)-násobek, tj. 4-násobek třetího řádku přičteme k prvnímu řádku a jeho (-3)-násobek, tj. 2-násobek přičteme k druhému řádku. Konečně výměnou druhého a třetího řádku dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Třetí řádek odečteme od prvního a od čtvrtého řádku. Dále jej vynásobíme skalárem $3^{-1} = 2$. Potom jeho (-4)-násobek, tj. přímo tento nový třetí řádek přičteme k druhému řádku. Výsledná matice už je v redukovaném schodovitém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proměnnou x_4 si zvolíme za parametr. Všechna řešení soustavy pak mají tvar $x_1 = t, x_2 = 2t, x_3 = 2t, x_4 = t$, kde $t \in \mathbf{Z_5}$. Vidíme, že původní soustava (přestože počet rovnic je stejný jako počet neznámych) má více než jedno řešení; není jich však nekonečně mnoho, ale pouze 5. Právě tolik je totiž možných voleb parametru t, tj. prvků pole $\mathbf{Z_5}$.

Příklad: Uvažujme soustavu lineárních rovnic v neznámých x, y, z:

$$\begin{aligned} x + cy - cz &= -3 \\ x + (c-1)y - (c+3)z &= -5 \\ x + (c+1)y + 2z &= d - 1 \end{aligned}$$

Najděte všechny hodnoty parametrů c, d, pro které má soustava
(a) jediné řešení,
(b) nekonečně mnoho řešení,
(c) žádné řešení.
V případech (a), (b) najděte tato řešení v závislosti na parametrech c, d.

Řešení: Matici soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & -c & -3 \\ 1 & c-1 & -c-3 & -5 \\ 1 & c+1 & 2 & d-1 \end{array}\right)$$

převedeme pomocí Gaussovy eliminace na schodovitý tvar. První řádek opíšeme, k (-1)-násobku druhého řádku přičteme první řádek, ke třetímu řádku pričteme (-1)-násobek prvního řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & -c & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2+c & d+2 \end{array}\right)$$

Nyní první a druhý řádek opíšeme a ke třetímu řádku přičteme (-1)-násobek druhého řádku. Získáme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & -c & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & c-1 & d \end{array}\right),$$

ze které určíme, že
(a) soustava má jediné řešení pro $c \neq 1$, a to:

$$x = \frac{4cd - c - 2c^2 + 3}{c-1},\ y = \frac{2c - 2 - 3d}{c-1},\ z = \frac{d}{c-1};$$

(b) pro $c = 1, d = 0$ doplníme hodnoty parametrů do upravené matice soustavy, z níž již lehce určíme, že soustava má nekonečně mnoho řešení, která jsou tvaru

$$x = -5 + 4p,\ y = 2 - 3p,\ z = p,$$

kde $p \in \mathbf{R}$ je parametr;
(c) pro $c = 1, d \neq 0$ soustava obsahuje rovnici $0 = d$, v tomto případě tedy nemá řešení.

Cvičení:

1. Řešte soustavu rovnic v $\mathbf{R}$ a $\mathbf{Z_5}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

2. Řešte soustavu rovnic v $\mathbf{R}, \mathbf{Z_5}$ a $\mathbf{Z_7}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6 \end{aligned}$$

3. Řešte soustavu rovnic v $\mathbf{R}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 17x_3 - 29x_4 - 36x_5 &= 22 \\ 2x_1 - 3x_2 + 18x_3 - 27x_4 + 33x_5 &= 21 \\ 12x_1 - 18x_2 + 102x_3 - 174x_4 - 216x_5 &= 132 \\ 2x_1 - 3x_2 + 21x_3 - 24x_4 - 30x_5 &= 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 24x_3 - 21x_4 - 27x_5 &= 19 \end{aligned}$$

Soustavu řešte také jako homogenní.

4. Řešte soustavu rovnic v $\mathbf{C}$ užitím Gaussovy eliminace.
(a)

$$\begin{aligned} x + 2iy &= 5 + 4i \\ (3 - i)y + (6 - 2i)z &= 10 \\ 2x - z &= 5 + 3i \\ x + y + z &= 5 + 2i \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (1 + i)x + 3iy &= -i \\ (1 + 2i)x + (1 - i)y &= 6 + i \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (1 + i)x + (1 - i)y &= 6 + 4i \\ ix + (1 + 2i)y &= -3 + 5i \end{aligned}$$

5. Řešte soustavu rovnic v $\mathbf{R}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

6. Řešte soustavu rovnic v **R** užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

7. Řešte soustavu rovnic v **R** užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

8. Řešte následující systém rovnic, kde a, b, c jsou konstanty.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$$

9. Řešte následující systém rovnic.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 9 \\ x_1 - 2x_3 + 7x_4 &= 11 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 10 \end{aligned}$$

10. Řešte následující systém rovnic.

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -10x_1 + 15x_2 - 11x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Soustavu řešte také jako homogenní.

11. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b má soustava v **R**
(i) právě jedno řešení,
(ii) více než jedno řešení,
(iii) žádné řešení.
(a)

$$\begin{aligned} ax + y - 2z &= 1 \\ x - y + z &= 0 \\ (1+a)y - z &= b \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x - ay - 2z &= b \\ x + (1-a)y &= b - 3 \\ x + (1-a)y + az &= 2b - 1 \end{aligned}$$

12. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b má soustava v $\mathbf{Z_5}$
(i) právě jedno řešení,
(ii) více než jedno řešení,
(iii) žádné řešení.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3x + 4y + az &= 2 \\ 3x + 4az &= b \end{aligned}$$

13. V $\mathbf{Z_5}$ řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 3z &= 0 \\ 4x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Napište výčtem všechny prvky množiny řešení.

14. V $\mathbf{Z_5}$ řešte následující systém rovnic v závislosti na parametrech a a b.

$$\begin{aligned} ax + y &= b \\ ay + z &= 2b \\ x + az &= 4 \end{aligned}$$

15. Určete parametry a, b, c tak, aby následující systém měl právě jedno řešení.

$$\begin{aligned} ax + by = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{aligned}$$

16. Řešte soustavu rovnic v závislosti na parametrech a, b.

$$\begin{aligned} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{aligned}$$