Matice

- Matice typu $m \times n$ má m řádků a n sloupců. Označují se velkými tiskacími písmeny, např. A.
- Operace s maticemi stejného typu – sčítání (po složkách): $A = (a_{ij}); B = (b_{jk}); A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$. Násobení skalárem c z reálných čísel $cA = (ca_{ij})$. Násobení matic A typu $m \times n$ s maticí B typu $n \times p$ je $A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)$ typu $m \times p$. Násobení není komutativní (ani pro čtvercové matice), $B \cdot A$ není definované.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1*7+2*10 & 1*8+2*11 & 1*9+2*12 \\ 3*7+4*10 & 3*8+4*11 & 3*9+4*12 \\ 5*7+6*10 & 5*8+6*11 & 5*9+6*12 \end{pmatrix}.$$

  Pro čtvercové matice mocnina: $A^n = A^{n-1} \cdot A; \quad A^0 = E$, je komutativní.
- Čtvercová matice typu $n \times n$. Pojmy: Nulová matice O; $A + O = O + A = A$, jednotková matice, zn. I nebo E; $E \cdot A = A \cdot E = A$, horní a dolní trojúhelníková matice - uzavřené na součiny a součty, diagonální, transponovaná, symetrická matice.
- Inverzní matice k matici A je matice A^{-1}, platí $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Je určena jednoznačně, pokud existuje. Matice, které mají inverzi jsou regulární. $(A^{-1})^{-1} = A$, součin regulárních matic je regulární, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (pořadí!).
- Hodnost matice A je její maximální počet lineárně nezávislých řádků. Zn. $h(A)$.
- Hledání inverzní matice: matici $(A|E)$ řádkovými úpravami upravíme na tvar $(E|*)$, kde $* = A^{-1}$.
- Soustavu lineárních rovnic můžeme zapsat jako $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Pak řešení je tvaru: $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$, matice A musí být regulární a je právě jedno řešení.
- Frobeniova věta: Systém lineárních rovnic (LS) má (alespoň jedno) řešení právě tehdy, když $h(A) = h(A|b)$.
- Myslím že toto nepatří na cvičení, ale když budete chtít: řádkové úpravy matice lze reprezentovat jako zleva součin vhodných regulárních matic.

Determinaty

- Minor příslušející prvku a_{ij} označme jako $|M_{ij}|$. Vznikne z matice vynecháme i–tého řádeku a j–tého sloupece. Výraz nazveme $A_{ij} := (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ jako algebraický doplněk příslušející prvku a_{ij}.
- Determinat je reálný číslo. Determinat lze definovat Laplaceovým rozvojem podle prvního řádku:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a11 & a12 & ... & a1n \\ a21 & a22 & ... & a2n \\ ... & ... & ... & ... \\ an1 & an2 & ... & ann \end{vmatrix} := \begin{matrix} a11, & \textit{pokud } n = 1, \\ a11\,A11 + a12\,A12 + ... + a1n\,A1n, & \textit{pokud } n > 1. \end{matrix}$$

  Takže jde o rekurentní definici.

- Laplaceův rozvoj lze použít na libovolný řádek nebo sloupec.
- Výpočet determinantu řádu 2 přímo a řádu 3 Saarusovým pravidlem - dopíšou se první dva sloupce na konec matice a sčítají se 3 součiny prvků na hlavních diagonálách a odčítají 3 součiny prvků na vedlejších diagonálách.
- Vlastnosti determinantu:

$$|A| = |A^T|$$
$$|AB| = |A| \cdot |B|$$
$$|A^{-1}| = 1/|A|$$

  Je-li A horní(dolní) troj. matice, pak determinant je součin prvků na diagonále.

- Úpravy determinantu řádkovými úpravami: záměna 2 řádků změní znamínko determinantu, vynásobení řádku číslem způsobí vynásobení determinantu stejným číslem. Přičtení a–násobku některého řádku (sloupce) determinantu k jinému řádku (sloupci) nemění hodnotu determinantu.
- Singulární matice je ta, co má nulový determinant, regulární matice má nenulový determinat
- Adjungovaná matice

$$A^* := (Aji) = \begin{pmatrix} A11 & A12 & ... & A1n \\ A21 & A22 & ... & A2n \\ ... & ... & ... & ... \\ An1 & An2 & ... & Ann \end{pmatrix}^T.$$

  Matice adjungovaná k matici A se tedy vytvoří tak, že místo každého prvku a_{ij} napíšeme jeho algebraický doplněk A_{ij} a nakonec celou takto vznikou matici transponujeme.

- Je-li A reg. matice pak

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

  .

- Kramerovo pravidlo: Systém lineárních rovnic $Ax = b$, A je reg. Označme A_i matici, kterou získáme z matice A záměnou jejího i–tého sloupce za sloupec pravých stran b. Potom (jediné) řešení $x = (x_1, ..., x_n)$ tohoto systému je dáno vztahem

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \qquad i = 1, ..., n.$$