EUKLIDOVSKÝ PROSTOR

Euklidovský prostor je vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ spolu se skalárním součinem ($u{\cdot}v = v{\cdot}u$). (Poskytuje možnost zistit více informací, napr. vzájemná poloha podprostoru, délky, vzdálenosti, úhly.)

Délka (norma) vektoru

$$\|u\| := \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$$

Úhel dvou vektoru

$$\cos\varphi = \tfrac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

(Na délku a úhel jsme už příklady počítali dříve)

Vektory u, v jsou navzájem *kolmé (ortogonální)*, značíme $u \perp v$, když jejich vektorový součin je 0 (nastane pokud $\cos\varphi = 0$ tj. svírají pravý úhel).

Příklad 1 Uvědomte si, že nulový vektor je kolmý na libovolný vektor.

Příklad 2 Rozhodněte, zda vektory $(1, -1, 2)$ $(-1, 1, 1)$ jsou na sebe kolmé.
Řešení: $u \cdot v = -1 - 1 + 2 = 0$ tyhle vektory jsou na sebe kolmé

Příklad 3 Ukažte, že vektory standardní báze $e = (e_1, \ldots, e_n)$ jsou navzájem kolmé, tj. $e_i \perp e_j$ pro libovolný $i \neq j$.
Řešení: $e_i \cdot e_j = 0 + \ldots + 0 + 0 \cdot 1 + 0 + \ldots + 0 + 0 \cdot 1 + 0 + \ldots + 0 = 0$

Ortogonální podprostory
Dva podprostory X, Y jsou navzájem *kolmé (ortogonální)* pokud

$$\forall u \in X, \forall v \in Y : u \perp v \text{ tj. } u \cdot v = 0$$

Příklad 4 Uvědomte si, že stejně jako jsou na sebe kolmé vektory standardní báze, jsou na sebe kolmé i vektorové podprostory generované jednotlivými vektory, a taky podprostory generované ruznými vektory standardní báze ($Span\langle e_1, e_2\rangle$ a $Span\langle e_3\rangle$ v $\mathbb{R}^3$).

Příklad 5 Jsou následující podprostory $\mathbb{R}^4$ kolmé?

$$U = Span\langle (1, 2, 3, 0)^T, (1, -1, 0, 0)^T\rangle \; V = Span\langle (2, 2, -2, 5)^T\rangle$$

Řešení: Stačí ukázat, že jsou na sebe kolmé vektory báze, teda

$$(1, 2, 3, 0) \cdot (2, 2, -2, 5) = 2 + 4 - 6 + 0 = 0$$
$$(1, -1, 0, 0) \cdot (2, 2, -2, 5) = 2 - 2 + 0 + 0 = 0$$

Podprostory jsou na sebe kolmé.

Ortogonální doplněk
X podprostor Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, potom se množina

$$X^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n, u \perp v \text{ pro všechny } v \in X\}$$

nazývá *ortogonální doplněk* podprostoru X v $\mathbb{R}^n$ (opět podprostor).
Toto by měli vědet z přednášky ale je dobré to mít sebou:

- triviální podprostory $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$ tvoří navzájem ortogonální doplňky
- prunik na sebe kolmých podprostoru je nulový vektor
- $dim X + dim X^\perp = n$
- $(X^\perp)^\perp = X$
- $\mathbb{R}^n = X \oplus X^\perp$ (přímý součet = libovolný prvek $\mathbb{R}^n$ se dá vyjádřit jako součet dvou prvku – jeden z X, druhý z $X^\perp$)

Příklad 6 Opět uvědomte si, že ortogonální doplněk lineárního obalu některých vektoru standardní báze je lineární obal zvyšných vektoru z této báze.

Příklad 7 Určete ortogonální doplněk $X = Span\langle(1,-1,1,0,0),(1,0,1,0,1),$ $(1,1,0,-1,1)\rangle$ v $\mathbb{R}^5$
Řešení: Ortogonální doplněk je množina všech vektoru kolmých na všechny vektory zadaného podprostoru. Je zřejmé, že stačí najít množinu všech vektoru kolmých na vektory báze.

$$x \in X^\perp \Leftrightarrow x \cdot v_1 = 0; x \cdot v_2 = 0; x \cdot v_3 = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Vychází nám tedy pro parametry $s, t \in \mathbb{R}$

$$x_5 = s \; x_4 = t \; x_3 = -s - t \; x_2 = -s \; x_1 = t$$

$$X^\perp = \{(t, -s, -s-t, t, s); s, t \in \mathbb{R}\} = Span\langle(1,0,-1,1,0),(0,-1,-1,0,1)\rangle$$

Fundamentální podprostory matice

A matice typu $m \times n$

- *jádro* $KerA \subseteq \mathbb{R}^n$ je množina všech řešení $Ax = 0$
- *řádkový prostor* $R(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ je množina všech lineárních kombinací řádku matice A
- *sloupcový prostor* $ImA \subseteq \mathbb{R}^m$ je množina všech lineárních kombinací sloupcu matice A
- k nim se ještě přiřazují fundamentální podprostory matice A^T
- platí pro ně mnoho rovností (skripta), nemyslím ale, že by patřili na cvika...

Příklad 8 Určete $KerA$, $R(A)$, ImA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení: Nejdřív najdeme $KerA$ jako řešení $Ax = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = t \; x_3 = 3t \; x_2 = -5t \; x_1 = 6t$$

$$KerA = \langle (6t, -5t, 3t, t); t \in \mathbb{R} \rangle = Span\langle (6, -5, 3, 1) \rangle$$
$$R(A) = Span\langle (1, 1, -1, 2), (-1, 0, 1, 3), (1, 2, 0, 4) \rangle$$
$$ImA = Span\langle (1, -1, 1), (1, 0, 2), (-1, 1, 0) \rangle$$