DETERMINANTY

Pěkné počítání :)

Příklad 1. Vypočtěte determinanty:

1) $\begin{vmatrix} 1 & \cos u + i\sin u \\ \cos u - i\sin u & 1 \end{vmatrix}$,

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}$, 5) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$,

6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$, 7) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, 8) $\begin{vmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 4 & 9 & 7 \\ 2 & -8 & -3 \end{vmatrix}$, 9) $\begin{vmatrix} 17 & 8 & -15 \\ 19 & 9 & -17 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix}$,

10) $\begin{vmatrix} 7 & 12 & 13 \\ 12 & 14 & 10 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$, 11) $\begin{vmatrix} 2a & 2a & 2a \\ -a & a & x \\ 3a & 3a & -3x \end{vmatrix}$, 12) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$,

13) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}$, kde $a = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, 14) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x\cos y & \sin x\sin y \\ -\sin x & \cos x\cos y & \cos x\sin y \\ 0 & -\sin y & \cos y \end{vmatrix}$;

15) $\begin{vmatrix} \sin x & 1 & \cos x \\ \sin y & 1 & \cos y \\ \sin z & 1 & \cos z \end{vmatrix}$, 16) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$, 17) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,

18) $\begin{vmatrix} 1/3 & -5/6 & 1/4 & -1/15 \\ 1/2 & -1/2 & -1/5 & 1/3 \\ -2/3 & -5/6 & -1/2 & 2/3 \\ -1/2 & 1/3 & 3/10 & -2/5 \end{vmatrix}$, 19) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 8 \\ 5 & 2 & 9 & 9 \\ 7 & 3 & 7 & 24 \\ 6 & 9 & 15 & 10 \end{vmatrix}$, 20) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 12 & 2 \\ 7 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$,

21) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, 22) $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ b & 1 & 1 & 0 \\ c & 2 & 1 & 1 \\ d & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, 23) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$,

24) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, 25) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 16 & 7 & 11 \\ 9 & 7 & 10 & 11 & 3 \end{vmatrix}$, 26) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$,

27) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$, 28) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, 29) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

[1) 0, 2) 0, 3) -144, 4) 90, 5) 4, 6) 5, 7) -52, 8) -187, 9) 0, 10) 60, 11) $-12a^2(a+x)$, 12) $-2(x^3+y^3)$, 13) $-3i\sqrt{3}$, 14) 1, 15) $\sin(x-z)+\sin(z-y)+\sin(y-x)$, 16) 18, 17) -9, 18) $-\frac{1}{2160}$, 19) -185, 20) 138, 21) $3a-b$, 22) $-a-b-c+2d$, 23) $48a-3b+45c-39d$, 24) $-x-y+8$, 25) 84, 26) 0, 27) 52, 28) 5, 29) 100.]

Příklad 2. Řešte v $\boldsymbol{R}$ rovnice:

a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$, b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x & 3 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$, c) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$,

d) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, e) $\begin{vmatrix} 3x & 0 & x \\ -x & 0 & 2 \\ 0 & x & 5 \end{vmatrix} = 0$, f) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2x & -2 \end{vmatrix} = 9$,

g) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$, h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$.

[a) $\frac{5}{2}, \frac{2}{3}$, b) $0, 2, -2$, c) $1, -1$, d) $0, -2$, e) $0, -6$, f) $1, -2$, g) $3, -1$, h) $1, -1, 2, -2$]

Příklad 3. Určete číslo a $(a \in \mathbb{R})$ tak, aby byly vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ (resp. $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$) lineárně závislé:

a) $\vec{u}_1 = (3,-1)$, $\vec{u}_2 = (a,4)$

b) $\vec{u}_1 = (a,2)$, $\vec{u}_2 = (18,a)$

c) $\vec{u}_1 = (a,a+1)$, $\vec{u}_2 = (3a,4)$

d) $\vec{u}_1 = (1,-1,2)$, $\vec{u}_2 = (0,3,1)$, $\vec{u}_3 = (2,a,3)$

e) $\vec{u}_1 = (3,a,-1)$, $\vec{u}_2 = (1,0,a)$, $\vec{u}_3 = (1,-2,3)$

f) $\vec{u}_1 = (1,1,a)$, $\vec{u}_2 = (3,a,-2)$, $\vec{u}_3 = (a,6,-12)$

[a) $a=-12$, b) $a=\pm 6$, c) $a=0; \frac{1}{3}$, d) $a=-5$, e) $a=-1; -2$, f) $a=4$]

Příklad 4. Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavy rovnic:

a) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$ b) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 29 \\ -4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}$ e) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 31 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 29 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 10 \end{array}$ d) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 11 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \end{array}$

[a) $\{(1,0,2)\}$, b) $\{(3,4,5)\}$, c) $\{(3,4,5)\}$, d) $\{(3,1,1)\}$, e) $\{(2,-2,3)\}$]

Příklad 5. Pomocí adjungované matice najděte inverzní matici k matici A:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 19 & 12 & 2 \\ 11 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

[a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 9 & -42 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \\ -7 & 33 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$]