Diferenční rovnice

Diferenční rovnice

př: posloupnost 3, 9, 27, 81, ... $a(n+1) = 3 \cdot a(n)$, $a(1) = 3$ ... rekurentní zadání (diferenční rovnice)

$a(n) = 3^n$ .... vzorec pro n-tý člen (její řešení)

(A) homogenní (s konst. koeficienty)

Najděte posloupnost, pro kterou platí:

př 1 $\underline{a(n+1) = 3 \cdot a(n)}$, $a(1) = 6$

$a(n+1) - 3a(n) = 0$

charakteristická rovnice: $\lambda - 3 = 0$

$\lambda = 3$

$a(n) = c \cdot 3^n$

poč. podm.: $6 = a(1) = c \cdot 3^1$

$c = 2$ $\quad$ $\underline{\underline{a(n) = 2 \cdot 3^n}}$

př 2 $\underline{2a(n+1) + 5a(n) = 0}$, $a(1) = -10$

$2\lambda + 5 = 0$

$\lambda = -\frac{5}{2}$

$a(n) = c \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^n$

poč. podm.: $-10 = a(1) = c \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^1 \cdot / \left(-\frac{2}{5}\right)$

$c = 4$

$\underline{\underline{a(n) = 4 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^n}}$

př 3 $\underline{a(n+2) - 2a(n+1) - 3a(n) = 0}$, $a(1) = -1$, $a(2) = 13$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$

$a(n) = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 3^n$

poč. podm.: $-1 = a(1) = c_1 \cdot (-1)^1 + c_2 \cdot 3^1$

$\underline{13 = a(2) = c_1 \cdot (-1)^2 + c_2 \cdot 3^2}$

$-1 = -c_1 + 3c_2$

$\underline{13 = c_1 + 9c_2}$ $\quad$ $\underline{\underline{a(n) = 4 \cdot (-1)^n + 3^n}}$

$12 = 12c_2 \Rightarrow c_2 = 1$

$-1 = -c_1 + 3 \cdot 1 \Rightarrow c_1 = 4$

pr. 4 $\quad a(n+2) - 4a(n+1) + 4a(n) = 0, \; a(1) = 8, \; a(2) = 20$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$\lambda_{1,2} = 2$ ... dvojnásobný kořen

$$a(n) = c_1 2^n + c_2 n 2^n$$

poč. podm.: $\quad 8 = a(1) = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 2^1$

$$20 = a(2) = c_1 2^2 + c_2 \cdot 2 \cdot 2^2$$

$$8 = 2c_1 + 2c_2 \quad /:2$$

$$20 = 4c_1 + 8c_2 \quad /:4$$

$$4 = c_1 + c_2$$

$$5 = c_1 + 2c_2$$

$$1 = c_2, \quad c_1 = 3$$

$$a(n) = 3 \cdot 2^n + 1 \cdot n 2^n \Rightarrow a(n) = 2^n(n+3)$$

pr. 5 char. rce má komplexní kořeny $\alpha \pm \beta i$, kde $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ je gon. tvar jednoho z nich

$$a(n) = c_1 r^n \cos(n\varphi) + c_2 r^n \sin(n\varphi)$$

$$a(n+2) - 2a(n+1) + 4a(n) = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\lambda_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow a(n) = c_1 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + c_2 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

(B) Nehomogenní (s konstant. koeficienty)

pr. 5 $\quad a(n+1) + 2a(n) = 3n + 7$

homogenní: $\quad a(n+1) + 2a(n) = 0$

$$\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = -2$$

$$a(n) = c \cdot (-2)^n + a_0$$

pravá strana: $p(n) = 3n + 9$; obecně $p(n) = q^n P(n)$

$q = 1, \; P(n) = 3n + 9$

$a_0 = n^p q^n Q(n)$, $\quad Q(n)$ ... stejný stupeň jako $P(n)$

$a_0 = n^0 1^n (an+b)$ $\quad$ p ... násobnost čísla q jakožto kořene charakteristické rovnice

$a_0 = an+b$

↑ dosadíme do pův. rce $\Rightarrow p = 0$ (1 není kořenem)

$$a(n+1) + b + 2 \cdot [an+b] = 3n + 7$$

$$an + a + b + 2an + 2b = 3n + 7$$

$$3an + a + 3b = 3n + 7$$

$n: \; 3a = 3 \Rightarrow a = 1$

$k: \; a + 3b = 7 \Rightarrow b = 2$

$$a(n) = c(-2)^n + n + 2$$

$\underline{\text{př. 6}}$ $\underline{a(n+1) - 3a(n) = 3^n(12n-3)}$

homogenní: $a(n+1) - 3a(n) = 0$ $\qquad p(n) = 3^n(12n-3)$ $\qquad p(n) = q^n P(n)$, $q = 3$, $P(n) = 12n-3$

$\lambda - 3 = 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow\ p = 1$

$\lambda = 3$ $\qquad a_0 = n^p q^n (An+B)$

$a_0 = n\,3^n(An+B)$

$a(n) = c\cdot 3^n + a_0$ $\qquad$ ↑ dosadíme do původní rovnice

$$(n+1)\,3^{n+1}\cdot[A(n+1)+B] - 3\cdot n\,3^n(An+B) = 3^n(12n-3) \quad /:3^n$$

$$(3n+3)\cdot(An+A+B) - 3n(An+B) = 12n-3$$

$$\underline{3An^2} + \underline{3An} + \underline{3Bn} + \underline{3An} + \underline{3A} + \underline{3B} - \underline{3An^2} - \underline{3Bn} = 12n-3$$

$$6An + 3A + 3B = 12n - 3$$

$n:\ 6A = 12 \quad \Rightarrow A = \underline{2}$

$k:\ 3A + 3B = -3 \qquad B = -3$

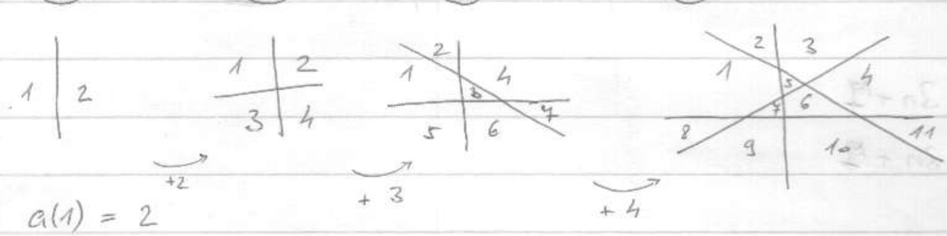
$$a(n) = c\,3^n + n\cdot 3^n(2n-3)$$

$$\underline{\underline{a(n) = 3^n(2n^2 - 3n + c)}}$$

Aplikace diferenčních rovnic

$\underline{\text{př. 7}}$ Na kolik nejvíce a na kolik nejméně je rovina rozdělena $\underline{n}$ přímkami

(1) (2) (3) (4)



$a(1) = 2$

$a(2) = 4 = a(1) + 2$ $\qquad\qquad$ $\underline{2.\ zp.}$: $a(1) = 2$

$a(3) = a(2) + 3$ $\qquad\qquad a(2) - a(1) = 2$

$a(4) = a(3) + 4$ $\qquad\qquad a(3) - a(2) = 3$

sečteme $\qquad a(4) - a(3) = 4$

$\vdots$

$a(n) = a(n-1) + n$ $\qquad\qquad a(n-1) - a(n-2) = n-1$

$\underline{a(n+1) = a(n) + n + 1,\ \ a(1) = 2}$ $\qquad\qquad \underline{a(n) - a(n-1) = n}$

hom.: $a(n+1) - a(n) = 0$ $\qquad\qquad a(n) = 2+2+3+4+\dots+n = \overbrace{1+1+2+3+4+\dots+n}^{\text{aritm. řada}} =$

$\lambda - 1 = 0$ $\qquad\qquad = \underline{\underline{1 + \frac{n}{2}(n+1)}}$ ✓

$\lambda = 1$

$a(n) = c \cdot 1^n + a_0$ $\qquad p(n) = n+1$, $p(n) = q^n P(n)$, $q = 1$, $P(n) = n+1$

$\beta = 1$

$$a_0 = n \cdot (an+b)$$

$(n+1) \cdot [a(n+1)+b] - n(an+b) = n+1$

$\underline{an^2} + 2an + a + \underline{bn} + b - \underline{an^2} - \underline{bn} = n+1$

$2an + a + b = n+1$

$n: \; 2a = 1 \quad \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$k: \; \underline{a+b=1} \qquad b = \frac{1}{2}$

$a(n) = c + n \cdot (\frac{1}{2}n + \frac{1}{2})$ $\qquad$ poč. podm.: $2 = a(1) = c + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$

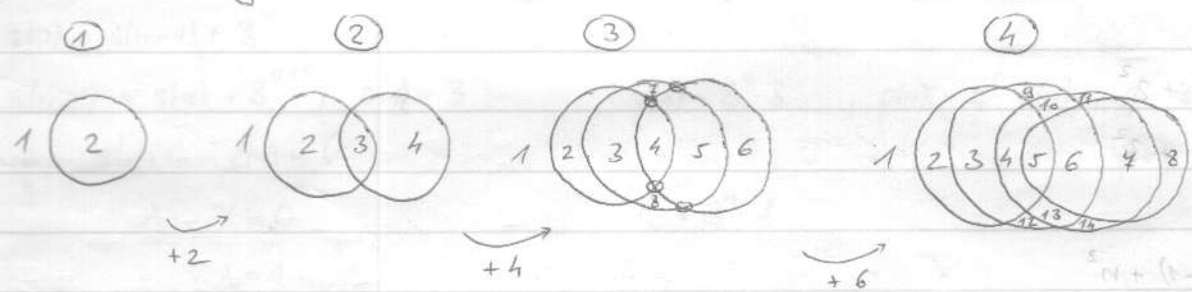
$a(n) = c + \frac{1}{2} n(n+1)$ $\qquad c = 1$

$\underline{\underline{a(n) = 1 + \frac{1}{2} n(n+1)}}$ ... nejvíce částí

nejméně částí: $1 | 2 | 3 | 4 | 5 | \ldots | n+1$ $\qquad$ $\underline{n+1}$ částí

n přímek

pr. 8 Na kolik nejvíce a na kolik nejméně částí je rovina rozdělena $\underline{n}$ kružnicemi.



$a(1) = 2$

$a(2) = 4 = a(1) + 2$ $\qquad$ hom. rce.: $a(n+1) - a(n) = 0$

$a(3) = 8 = a(2) + 4$ $\qquad \lambda - 1 = 0$

$a(4) = 14 = a(3) + 6$ $\qquad \lambda = 1$

$\vdots$

$a(n) = a(n-1) + 2(n-1)$ $\qquad a(n) = c \cdot 1^n + a_0$

$\underline{a(n+1) = a(n) + 2n, \; a(1) = 2}$

$p(n) = 2n$, $p(n) = q^n P(n)$, $q = 1$, $P(n) = 2n$

$\Downarrow$

$p = 1$

$a_0 = n(an+b)$

$(n+1)[a(n+1)+b] - n(an+b) = 2n$

$an^2 + 2an + a + bn + b - an^2 - bn = 2n$

$2an + a + b = 2n$

$n: \ 2a = 2 \implies a = 1$

$1: \ \underline{a+b=0} \qquad b = -1$

$a(n) = c + n(n-1)$

poc. podm.: $2 = a(1) = c + 1\cdot(1-1)$

$c = 2$

$\underline{\underline{a(n) = 2 + n(n-1)}}$ ... nejvíce částí

nejméně částí: ① ② ③ ... ⓝ $n+1 \implies \underline{\underline{n+1 \text{ částí}}}$

<u>př. 9</u> Vypočtěte: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = ?$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$

$s(1) = 1$

$s(2) = s(1) + 2^2$

$s(3) = s(2) + 3^2$

$\vdots$

$s(n) = s(n-1) + n^2$

$\underline{s(n+1) = s(n) + (n+1)^2, \ s(1) = 1}$

homog.: $s(n+1) - s(n) = 0$

$\lambda - 1 = 0$

$\lambda = 1$

$p(n) = (n+1)^2$, $p(n) = q^n P(n)$, $q = 1$, $P(n) = (n+1)^2$

$\Downarrow$

$p = 1$

$g_0 = n(an^2 + bn + c)$

$s(n) = c\cdot 1^n + a_0$

$g_0 = an^3 + bn^2 + cn$

$a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) - [an^3 + bn^2 + cn] = (n+1)^2$

$an^3 + 3an^2 + 3an + a + bn^2 + 2bn + b + cn + c - an^3 - bn^2 - cn = n^2 + 2n + 1$

$n^2: 3a = 1 \quad \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$n^1: 3a + 2b = 2 \quad b = \frac{1}{2}$

$k: a + b + c = 1 \quad c = \frac{1}{6}$

$s(n) = c + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

poc. podm.: $1 = s(1) = c + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

$c = 0$

$s(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

$s(n) = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$

$\underline{\underline{s(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}$

geometrické posloupnost s $q = 3$ $\quad S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

jinak

$\underline{\text{př. 10}}$ Vypočtěte: $\sum_{i=1}^{n} 3^i = ?$ $\quad = 3 + 9 + 27 + 81 + \dots + 3^n = 3 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = \underline{\underline{\frac{3}{2}(3^n - 1)}}$

$\sum_{i=1}^{n} 3^i = 3 + 9 + 27 + 81 + \dots + 3^n$

$s(1) = 3$

$s(2) = s(1) + 3^2$

$s(3) = s(2) + 3^3$

$\vdots$

$s(n) = s(n-1) + 3^n$

$\underline{s(n+1) = s(n) + 3^{n+1}, \quad s(1) = 3}$

$p(n) = 3^n \cdot 3 \quad , p(n) = q^n \cdot P(n) \, , \; q = 3 \, , \; P(n) = 3$

$\Downarrow$

$p = 0$

homog.: $s(n+1) - s(n) = 0$

$\lambda - 1 = 0$

$\lambda = 1$

$S_0 = 3^n \cdot A$

$3^{n+1} \cdot A - 3^n \cdot A = 3^{n+1} \quad /: 3^n$

$s(n) = c \cdot 1^n + s_0$

$3A - A = 3$

$s(n) = c + \frac{3}{2} 3^n$

$2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2}$

poc. podm.: $3 = s(1) = c + \frac{3}{2} \cdot 3^1$

$c = -\frac{3}{2}$

$s(n) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} 3^n$

$\underline{\underline{s(n) = \frac{3}{2}(3^n - 1)}}$

př.11 Kolik bude za 1 rok v laboratorní misce bakterií, jestliže na začátku každého měsíce do misky vložíme 500 bakterií a roční přírůstek bakterií je 6% ?

konec 1. měsíce: $b_1 = 500 + \frac{0{,}06 \cdot 500}{12} = 500 + 0{,}005 \cdot 500 = 500 \cdot 1{,}005$

2. měsíce: $b_2 = (b_1 + 500) \cdot 1{,}005 = 1{,}005\, b_1 + 502{,}5$

3. měsíce: $b_3 = (b_2 + 500) \cdot 1{,}005 = 1{,}005\, b_2 + 502{,}5$

$\vdots$

$\underline{b(n+1) = 1{,}005\, b(n) + 502{,}5}, \quad b(1) = 502{,}5$

homog.: $b(n+1) - 1{,}005\, b(n) = 0$

$\lambda - 1{,}005 = 0$

$\lambda = 1{,}005$

$b(n) = c \cdot 1{,}005^n + b_0$

$b(n) = c \cdot 1{,}005^n - 100\,500$

$p(n) = 502{,}5, \quad p(n) = q^n P(n), \quad q = 1, \quad P(n) = 502{,}5$

$b_0 = A \qquad \frac{1}{p} = 0$

poč. podm.: $502{,}5 = b(1) = c \cdot 1{,}005^1 - 100\,500$

$c = \frac{502{,}5 + 100\,500}{1{,}005}$

$c = 100\,500$

$A - 1{,}005 A = 502{,}5$

$A = -\frac{502{,}5}{0{,}005} = -100\,500$

$b(n) = 100\,500 \cdot 1{,}005^n - 100\,500$

$\underline{\underline{b(n) = 100\,500\,(1{,}005^n - 1)}}$

$b(12) = 100\,500\,(1{,}005^{12} - 1) \doteq \underline{\underline{6198}}$ (udává počet bakterií ⇒ zaokrouhlíme dolů)

2.zp.: konec 1. měsíce $b_1 = 500 + \frac{0{,}06 \cdot 500}{12} = 1{,}005 \cdot 500$

2. měsíce $b_2 = (b_1 + 500) \cdot 1{,}005 = 1{,}005^2 \cdot 500 + 1{,}005 \cdot 500 = 500 \cdot (1{,}005 + 1{,}005^2)$

3. měsíce $b_3 = (b_2 + 500) \cdot 1{,}005 = 500 \cdot (1{,}005^2 + 1{,}005^3) + 500 \cdot 1{,}005 = 500 \cdot (1{,}005 + 1{,}005^2 + 1{,}005^3)$

$\vdots$

12. měsíce $b_{12} = 500 \cdot (1{,}005 + 1{,}005^2 + 1{,}005^3 + \dots + 1{,}005^{12}) \doteq \underline{\underline{6198}}$