Iterované procesy – řešený příklad
(pro studenty předmětu Matematika I, FI MU Brno)

pozn.: příklad vypadá složitě, vede však okamžitě na výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů matice, což je věc velmi jednoduchá a na provedení diagonalizace matice (což je také velmi jednoduché). A nic víc tady prakticky není. Je to hodně rozepsané, protože je to materiál k samostudiu. Jinak je to příklad na 10 minut ☺

Zadání:

Na ostrově Slonová Kost žije stálý počet lidí (1.000.000). Někteří žijí ve městech, ostatní na vesnici. Každý rok se 15% lidí z měst přestěhuje na vesnici a zároveň 10% lidí z vesnice se přestěhuje do města. Určete, v jakém poměru se ustálí počet lidí ve městech a na vesnici za mnoho let.

Řešení:

Provedeme základní označení:

M_o – počáteční počet lidí ve městech
V_o – počáteční počet lidí na vesnicích

M_k – počet lidí ve městech na konci k-tého roku
V_k – počet lidí na vesnici na konci k-tého roku

(pozn.: protože celkový počet lidí na ostrově se s časem nemění, musí pro každý rok platit $M_k + P_k = 1.000.000$, ale to je asi jasné ☺)

Kolik lidí bude ve městech na konci prvního roku?
Na začátku jich bylo M_o, ale 15% z nich se odstěhovalo – zbývá nám tedy už jen $M_o - 0{,}15\ M_o = 0{,}85\ M_o$. K nim se ale přistěhovalo 10% lidí z vesnice ($0{,}1\ V_o$). Celkem tedy:

$$M_1 = 0{,}85\ M_1 + 0{,}1\ V_1$$

Obdobně pro počet lidí na vesnici na konci prvního roku dostaneme:

$$V_1 = 0{,}15\ M_o + 0{,}9\ V_o$$

Když nebudeme uvažovat konec prvního roku, ale konec (k+1)-ního roku, dostaneme:

$$M_{k+1} = 0{,}85\ M_k + 0{,}1\ V_k$$
$$V_{k+1} = 0{,}15\ M_k + 0{,}9\ V_k$$

Získané rovnice zapíšeme maticově, ať vypadáme jako profesionálové ☺:

$$\begin{pmatrix} M_{k+1} \\ V_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_k \\ V_k \end{pmatrix}$$

zkrácený zápis: $x_{k+1} = A.x_k$

Na konci *k-tého* roku bude počet lidí ve městě vzhledem k počtu lidí na začátku

$$\begin{pmatrix} M_k \\ V_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}9 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} M_o \\ V_o \end{pmatrix}$$

(protože $x_1 = A.x_o$, $x_2 = A.x_1$, ..., $x_k = A.x_{k-1}$, dosadíme li všechny vztahy do sebe, dostaneme $x_k = A^k.x_o$.)

Naším úkolem je tedy najít k-tou mocninu (A^k) matice $A = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}9 \end{pmatrix}$. To provedeme tak, že nejprve nalezneme vlastní čísla a vlastní vektory této matice:

<u>vlastní čísla:</u>

$$\begin{vmatrix} 0{,}85-\lambda & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}9-\lambda \end{vmatrix} = (0{,}85-\lambda)(0{,}9-\lambda) - 0{,}1\cdot 0{,}15 = 0{,}765 - 0{,}85\lambda - 0{,}9\lambda + \lambda^2 - 0{,}015 = \underline{\lambda^2 - 1{,}75\lambda + 0{,}75 = 0}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1{,}75) \pm \sqrt{(1{,}75)^2 - 4\cdot 1\cdot 0{,}75}}{2\cdot 1} = \frac{1{,}75 \pm \sqrt{(1{,}75)^2 - 4\cdot 1\cdot 0{,}75}}{2} = \frac{1{,}75 \pm 0{,}25}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{1{,}75 + 0{,}25}{2} = \frac{2}{2} = \underline{1}$$

$$\lambda_{12} = \frac{1{,}75 - 0{,}25}{2} = \frac{1{,}5}{2} = \underline{0{,}75}$$

vlastní vektory:

$\lambda_1 = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}85-\lambda & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}9-\lambda & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}85-1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}9-1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -0{,}15 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}15 & -0{,}1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 15 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} 15M_k - 10V_k = 0 \\ 3M_k - 2V_k = 0 \end{array}$$

zvolíme $V_k = 3t$ (například; jako V_k jsme mohli zvolit třeba 876,5t... ☺)

$$3M_k - 2V_k = 0$$
$$3M_k - 2 \cdot 3t = 0$$
$$3M_k = 6t$$
$$M_k = 2t$$

Vlastní vektor je tedy **(2; 3)**.

$\lambda_2 = 0{,}75$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}85-\lambda & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}9-\lambda & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}85-0{,}75 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}9-0{,}75 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}15 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow M_k + V_k = 1$$

zvolíme $V_k = t$

$$M_k + V_k = 0$$
$$M_k + t = 0$$
$$M_k = -t$$

Vlastní vektor je tedy **(-1; 1)**.

Matice $A = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ má dvě vlastní hodnoty a dva vlastní vektory, je tedy diagonalizovatelná – čili dá se napsat ve tvaru $A = P.D.P^{-1}$; A^k, které hledáme, je pak $A^k = P.D^k.P^{-1}$.

Matice P je sestavena z vlastní vektorů matice (vektory ve <u>sloupcích</u>) A ... $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Matice D je diagonální matice, v jejíž diagonále jsou vlastní čísla matice A ... $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0^k \\ 0^k & \left(\frac{3}{4}\right)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^k \end{pmatrix}$$

Nyní stačí vypočítat P^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot(-2) \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \end{array}\right) \cdot(-5) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} -10 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} :(-10) \\ :(-5) \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^k = P.D^k.P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^k \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Důležitá a stěžejní věc tohoto příkladu!!! V zadání příkladu po nás chtějí, abychom zjistili, jak bude vypadat stav po mnoha letech, tzn. pro velké *k*. Se zvyšujícím se *k* jde hodnota výrazu $\left(\frac{3}{4}\right)^k$ k nule. Čili:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vrátíme se zpět k výpočtu A^k:

$$A^k = P.D^k.P^{-1} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Dostáváme tedy:

$$\begin{pmatrix} M_k \\ V_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}9 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} M_o \\ V_o \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_k \\ V_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_o \\ V_o \end{pmatrix}$$

Maticový zápis rozepíšeme opět do rovnic:

$$\begin{aligned} M_k &= 0{,}4M_o + 0{,}4V_o \\ \underline{V_k} &\underline{= 0{,}6M_o + 0{,}6V_o} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_k &= 0{,}4(M_o + V_o) \\ \underline{V_k} &\underline{= 0{,}6(M_o + V_o)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_k &= 0{,}4 \cdot 1.000.000 = 400.000 \\ V_k &= 0{,}6 \cdot 1.000.000 = 600.000 \end{aligned}$$

Závěr:

Nezávisle na počátečním rozdělení obyvatel mezi města a vesnice se stav po mnoha letech ustálí tak, že ve městech bude žít 40% obyvatel a na vesnici 60% obyvatel.