MB102 – 1. demonstrovaná cvičení
Interpolační polynomy

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

23.9. 2009

Plán přednášky

- (Základní věta algebry) Každý polynom s koeficienty v $\mathbb{C}$ má kořen v $\mathbb{C}$.

- (Základní věta algebry) Každý polynom s koeficienty v $\mathbb{C}$ má kořen v $\mathbb{C}$.
- Ne každý polynom s reálnými koeficienty má kořen v $\mathbb{R}$.

- (Základní věta algebry) Každý polynom s koeficienty v $\mathbb{C}$ má kořen v $\mathbb{C}$.
- Ne každý polynom s reálnými koeficienty má kořen v $\mathbb{R}$.
- Pomocí Hornerova schematu umíme dělit polynom lineárním mnohočlenem $(x - a)$ a při tom zjistíme hodnotu polynomu v bodě a.

- (Základní věta algebry) Každý polynom s koeficienty v $\mathbb{C}$ má kořen v $\mathbb{C}$.
- Ne každý polynom s reálnými koeficienty má kořen v $\mathbb{R}$.
- Pomocí Hornerova schematu umíme dělit polynom lineárním mnohočlenem $(x - a)$ a při tom zjistíme hodnotu polynomu v bodě a.
- Polynom stupně n je zadán svými hodnotami v $(n + 1)$ bodech.

- (Základní věta algebry) Každý polynom s koeficienty v $\mathbb{C}$ má kořen v $\mathbb{C}$.
- Ne každý polynom s reálnými koeficienty má kořen v $\mathbb{R}$.
- Pomocí Hornerova schematu umíme dělit polynom lineárním mnohočlenem $(x - a)$ a při tom zjistíme hodnotu polynomu v bodě a.
- Polynom stupně n je zadán svými hodnotami v $(n + 1)$ bodech.
- Máme-li zadáno $(n + 1)$ dvojic (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, pak pro každé $m > n$ existuje nekonečně mnoho polynomů P stupně m takových, že $P(x_i) = y_i$.

Příklad 1. *Určete polynom* $L \in \mathbb{C}[x]$ *zadaný následujícími podmínkami:* $L(1) = 2$, $L(2) = 3$, $L(3) = 5$.

Příklad 1. *Určete polynom* $L \in \mathbb{C}[x]$ *zadaný následujícími podmínkami:* $L(1) = 2$, $L(2) = 3$, $L(3) = 5$.

Řešení. $L(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2.$ $\square$

Příklad 1. *Určete polynom* $L \in \mathbb{C}[x]$ *zadaný následujícími podmínkami:* $L(i) = i$, $L(1) = -i$, $L(1-i) = 1$.

Hermiteův polynom můžeme určit podobně pomocí fundamentálních Hermiteových polynomů:

$$\begin{aligned} h_i^1(x) &= \left[1 - \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)}(x - x_i)\right](l_i(x))^2 \\ h_i^2(x) &= (x - x_i)\,(l_i(x))^2\,, \end{aligned}$$

kde $l(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$

Hermiteův polynom můžeme určit podobně pomocí fundamentálních Hermiteových polynomů:

$$\begin{aligned} h_i^1(x) &= \left[1 - \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)}(x - x_i)\right](l_i(x))^2 \\ h_i^2(x) &= (x - x_i)(l_i(x))^2, \end{aligned}$$

kde $l(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$
Tyto polynomy splňují následující podmínky:

$$\begin{aligned} h_i^1(x_j) &= \delta_i^j \\ (h_i^1)'(x_j) &= 0 \end{aligned}$$

Hermiteův polynom můžeme určit podobně pomocí fundamentálních Hermiteových polynomů:

$$\begin{aligned} h_i^1(x) &= \left[1 - \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)}(x - x_i)\right](l_i(x))^2 \\ h_i^2(x) &= (x - x_i)\,(l_i(x))^2\,, \end{aligned}$$

kde $l(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$
Tyto polynomy splňují následující podmínky:

$$\begin{aligned} h_i^1(x_j) &= \delta_i^j \\ (h_i^1)'(x_j) &= 0 \\ h_i^2(x_j) &= 0 \\ (h_i^2)'(x_j) &= \delta_i^j \end{aligned}$$

Příklad 2. *Určete Hermiteův interpolační polynom H zadaný následujícími podmínkami:*

$$H(0) = 2, \quad H(1) = 3, \quad H'(0) = 1, \quad H'(1) = 0$$

Příklad 2. *Určete Hermiteův interpolační polynom H zadaný následujícími podmínkami:*

$$H(0) = 2, \quad H(1) = 3, \quad H'(0) = 1, \quad H'(1) = 0$$

Řešení. $H(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$ $\square$