

MB102 – 3. demonstovaná cvičení

Limity a derivace

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

7.10. 2009

Plán přednášky

1 Domácí úlohy z minulého týdne

2 Návodné úlohy

Příklad 1. *Určete hromadné, izolované, hraniční a vnitřní body následujících podmnožin v \mathbb{R} :*

- 1 $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$
- 2 \mathbb{Q}
- 3 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x^2 < 2\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

Příklad 1. *Určete hromadné, izolované, hraniční a vnitřní body následujících podmnožin v \mathbb{R} :*

- 1 $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$
- 2 \mathbb{Q}
- 3 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x^2 < 2\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

Řešení.

- 1 0, všechny, všechny, \emptyset .
- 2 všechny, žádný, všechny, žádný
- 3 $\langle 0, \sqrt{2} \rangle$, žádné, 0, 2, $(0, \sqrt{2})$



Příklad 2. *Udejte příklad*

- 1 *podmnožiny v \mathbb{R} , která není ani otevřená ani uzavřená,*
- 2 *podmnožiny v \mathbb{R} , která je uzavřená, ale není kompaktní,*
- 3 *nekonečně mnoha uzavřených podmnožin \mathbb{R} jejichž sjednocením je otevřená množina.*
- 4 *nekonečně mnoha otevřených podmnožin \mathbb{R} jejichž průnikem je uzavřená množina.*

Příklad 3. *Bud' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definována následovně:*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x + 2 & \text{jestliže } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{jestliže } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Určete, ve kterých bodech je f spojitá. Zdůvodněte.

Plán přednášky

1 Domácí úlohy z minulého týdne

2 Návodné úlohy

Spočítejte následující limity posloupností:

1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2},$$

Spočítejte následující limity posloupností:

1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2},$$

2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{2n^3 - n^2 + 3},$$

Spočítejte následující limity posloupností:

1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2},$$

2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{2n^3 - n^2 + 3},$$

3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 2n^2 + 1}{n^2 - x + 3}.$$

1 Pro $c > 0$ ukažte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1.$$

- 1 Pro $c > 0$ ukažte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1.$$

- 2 Pro libovolná $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ ukažte $n! \geq \frac{k!}{k^k} k^n$.

- 1 Pro $c > 0$ ukažte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1.$$

- 2 Pro libovolná $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ ukažte $n! \geq \frac{k!}{k^k} k^n$.

- 3 Ukažte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Určete následující limity:

1

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6},$$

Určete následující limity:

1

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6},$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1},$$

Určete následující limity:

1

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6},$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1},$$

3

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}},$$

Určete následující limity:

1

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6},$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1},$$

3

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}},$$

4

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}},$$

Určete následující limity:

1

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6},$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1},$$

3

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}},$$

4

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}},$$

5

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}.$$

Z definice spočítejte derivace funkcí x^2 , $1/x$, $\sin(x)$.