x_0 kořen polynomu $P(x) \in \mathbb{C}[x]$
$\mathbb{R}[x]$

$\overset{\text{def.}}{\iff}$ $P(x_0) = 0$

$P_1(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$

$P(x) = H(x) \cdot Q(x) + R(x)$, (st. $R(x) <$ st. $Q(x)$
nebo $R(x) = 0$)

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

a_n ... vedoucí polynom

---

x_0 je kořenem $P(x) \iff (x - x_0) \mid P(x)$

Hornerovo schéma

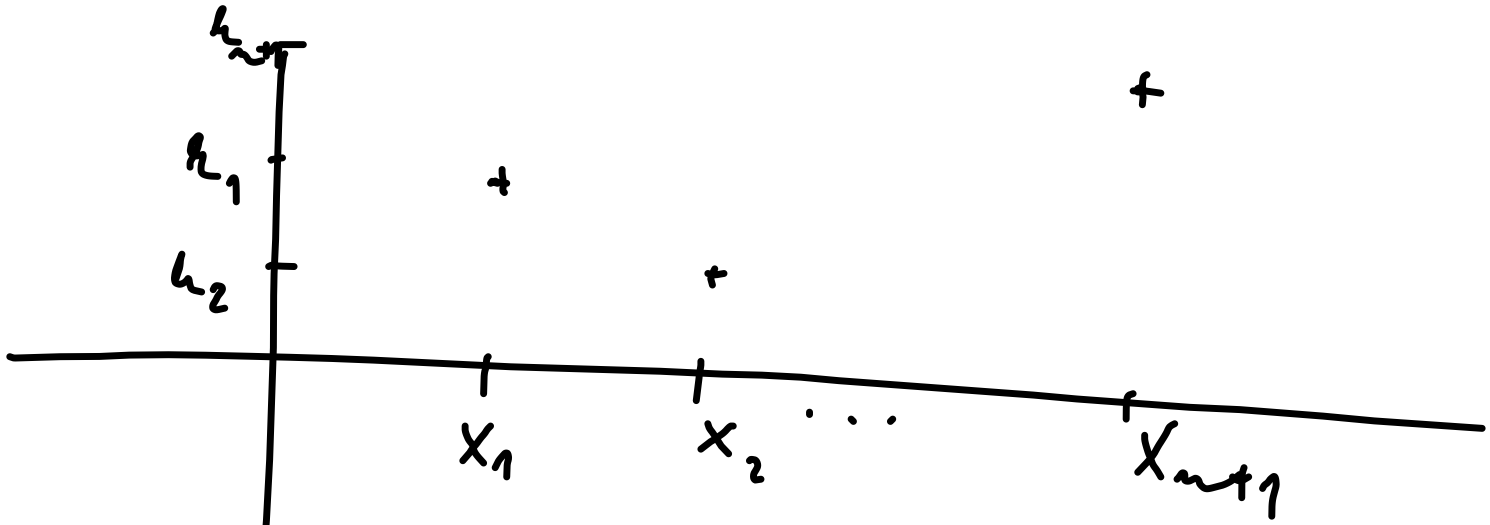
$$p(x) = 3x^4 + 2x^2 - 5x + 1$$

Určíme hodnotu $p(x)$ v bodě 2 :

	3	0	2	-5	1
2	3	6	14	23	47

a) $P(2) = 47$

b) $P(x) = (x-2)(3x^3 + 6x^2 + 14x + 23) + 47$



Kdyby existovaly 2 polynomy stupně nejvýše n tak, že $P(x_i) = Q(x_i) = h_i$, $1 \le i \le n+1$.
$(P-Q)$ by měl kořeny v bodech $x_1, \dots, x_{n+1}$
kořeny a stupeň nejvýše n, musí to být nulový polynom, tedy $P = Q$.

1) $L(1) = 2$

$L(2) = 3$

$L(3) = 5$

Víme, že existuje polynom nejvýše druhého stupně (vyhovující daným třem podmínkám)

$$L(x) = ax^2 + bx + c$$

$L(1) = 2: \quad a + b + c = 2 \Rightarrow c = 2 - a - b$

$L(2) = 3: \quad 4a + 2b + c = 3 \qquad 3a + b = 1 \quad / (\cdot 2)$

$L(3) = 5: \quad 9a + 3b + c = 5 \qquad 8a + 2b = 3$

$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow c = 2$

$$\Rightarrow L(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$$

Pomocí Lagrangeova tvaru interpolačního polynomu.

$$L(x) = 2 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$$

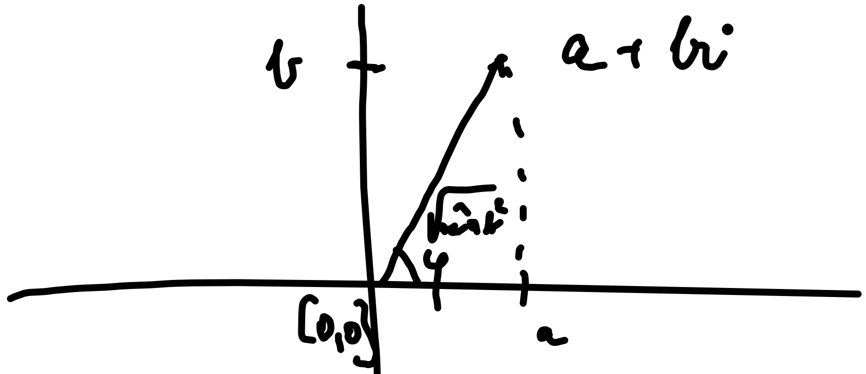
---

2)

$$L(1) = 3$$

$$L(1+i) = 2i+1$$

$$L(i) = 1$$



$$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Opět hledáme $L(x)$ ve tvaru ax^2+bx+c

$L(1)=3: \quad a+b+c=3 \qquad (1)$

$L(i+1)=2i+1: \quad a(1+i)^2+b(1+i)+c=2i+1$

$2ia+b(1+i)+c=2i+1 \qquad (2)$

$L(i)=1: \quad -a+bi+c=1 \qquad (3)$

$c=3-a-b \quad (*)$

$(2i-1)a+bi=2i-2 \quad /\cdot(i-1) \quad (*)$ do (2)

$-2a+b(i-1)=-2 \quad /\cdot i \quad (*)$ do (3)

$(-2-i-2i+1)a+b(i-1)i=-4i$

$-a(3i+1)+b(i-1)i=-4i \quad (\cdot(-1))$] +

$-2ai+b(i-1)i=-2i$

$(1+i)a=2i \Rightarrow a=\frac{2i}{(1+i)}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i+2}{2}=$

$=(1+i)$

$$-2(1+i)+b(i-1)=-2$$

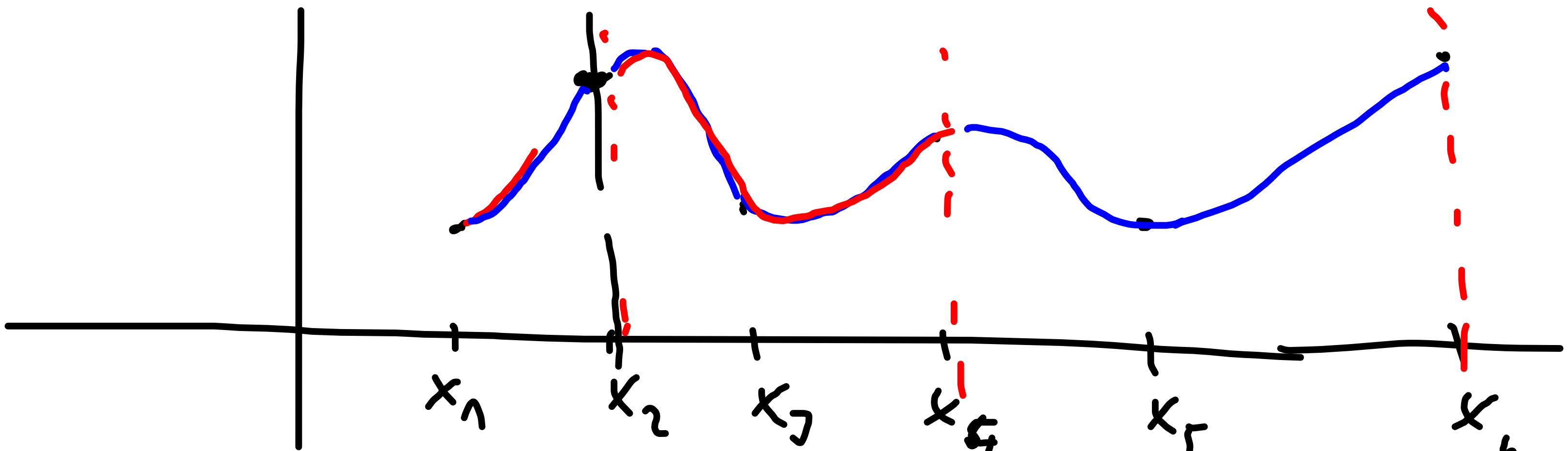
$$b(i-1)=2i$$

$$b=\frac{2i}{(i-1)}=\frac{2i(i+1)}{(i-1)(i+1)}=\frac{-2+2i}{-2}=1-i$$

$$c=3-a-b=3-(1+i)-(1-i)=1$$

Celkem

$$L(x)=(1+i)x^2+(1-i)x+1$$



Hermiteova interpolační úloha:
hledáme polynom, který nabývá v předepsaných
předepsaných hodnot i předepsaných hodnot
ce.

1. derivace

Př. 3

Budeme hledat polynom stupně nejvýše 3:

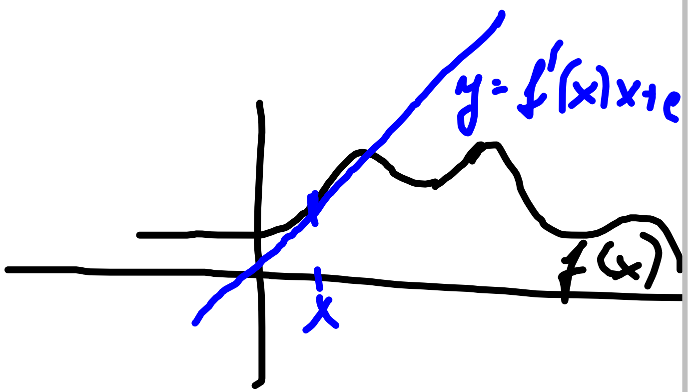
$H(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad H'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$H(0) = 2: \quad d = 2$

$H'(0) = 1: \quad c = 1$

$H(1) = 3: \quad a + b + c + d = 3$

$H'(1) = 0: \quad 3a + 2b + c = 0$



$a + b = 0$

$3a + 2b = -1$

$a = -1 \rightarrow b = 1$

Celkem:

$H(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_n)}$$