1) $x \in \mathbb{R}^+$

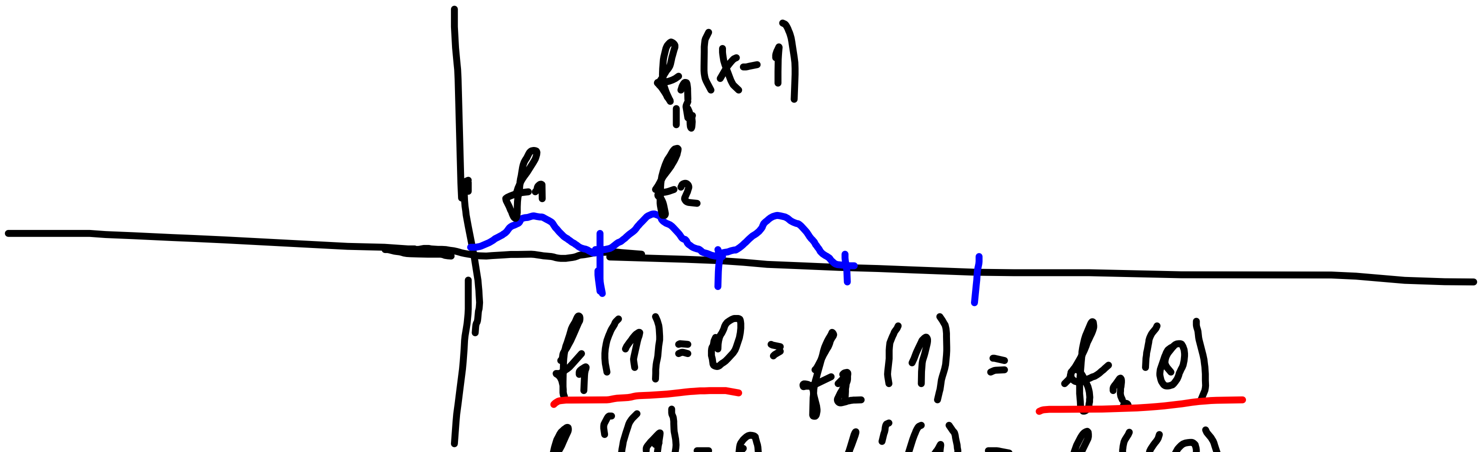
$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = (\ln x + 1)\, x^x$$

$$x^{x^x} = x^{(x^x)} = e^{\ln x \cdot x^x}$$

$$(x^{x^x})' = (e^{\ln x \cdot x^x})' = (\ln x \cdot x^x)' \cdot e^{\ln x \cdot x^x} =$$

$$= \left[x^{x-1} + \ln x\,(\ln x + 1)\, x^x\right] x^{x^x}$$

3)



$$f_1(1)=0=f_2(1)=f_1(0)$$
$$f_1'(1)=0=f_2'(1)=f_1'(0)$$
$$f_1''(1)=0=f_2''(1)=f_1''(0)$$
$$f_1'''(1)\neq f_1'''(1)\neq f_1'''(0)$$

Volme f_1 jako polynom tvaru $x^3+ax^4+bx^5+cx^6$
z podmínek pro f_1 v bodě 1 dostaváme

$$1 + a + b + c = 0$$

$$3 + 4a + 5b + 6c = 0 \qquad (f_1'(1) = 0)$$

$$6 + 12a + 20b + 30c = 0 \qquad (f_1''(1) = 0)$$

Vyřešíme danou soustavu pomocí manipulace s její maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -3 \\ 12 & 20 & 30 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 18 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2c = -2 \Rightarrow c = -1$$

$$b + 2c = 1 \Leftrightarrow b = 3$$

$$a + b + c = -1 \Rightarrow a = -1 - b - c = -3$$

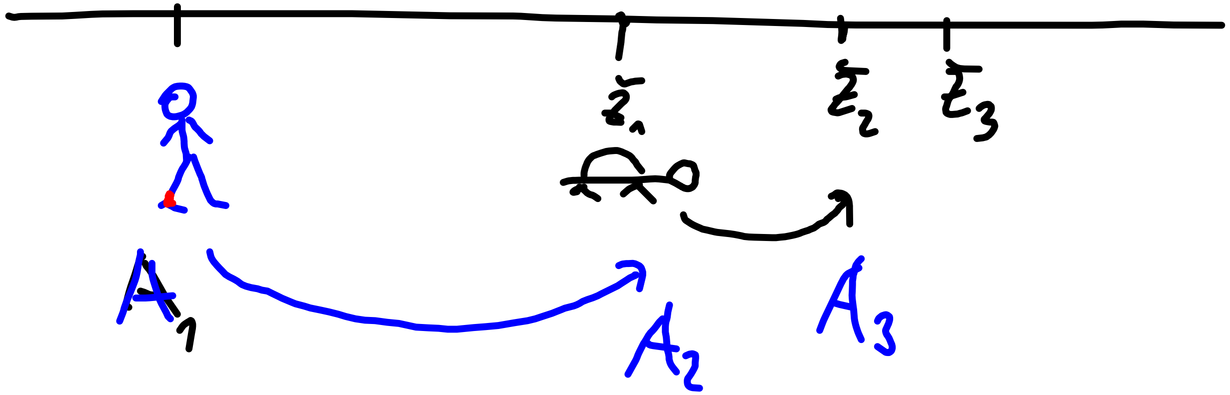
$$f_1'''(0) = 6$$

$$f_1'''(1) = -6$$

$$f_1(x) = x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6$$

Hledaná fce $f = (x-[x])^3 - 3(x-[x])^4 + 3(x-[x])^5 - (x-[x])^6$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$



$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$$

$$(q-1)S = q^{n+1} - 1 \Rightarrow S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$$

a) Odmocninové kritérium.

mějme řadu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \,, \quad q < 1 \Rightarrow \text{konverguje}$$

$q > 1 \Rightarrow$ diverguje

$q = 1$ tímto kritériem nemůžeme rozhodnout

b) Podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q \,, \quad q < 1 \Rightarrow \text{konverguje}$$

$> 1 \Rightarrow$ diverguje

$q = 1 \Rightarrow$ nemůžeme rozhodnout

c) Srovnávací kritérium:

$\{a_n\}, \{b_n\}, |a_n| \geq |b_n|$. $\{b_n\}$ diverguje $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{a_n\}$ diverguje

Harmonická řada

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\substack{2 \text{ členy} \\ > \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\substack{4 \text{ členy} \\ > \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots}_{\substack{8 \text{ členů} \\ > \frac{1}{2}}}$$

$\Rightarrow$ řada diverguje

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje

1, důkaz $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty$

2, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, nicméně $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverg.

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n\cdot 2^{100\,000}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

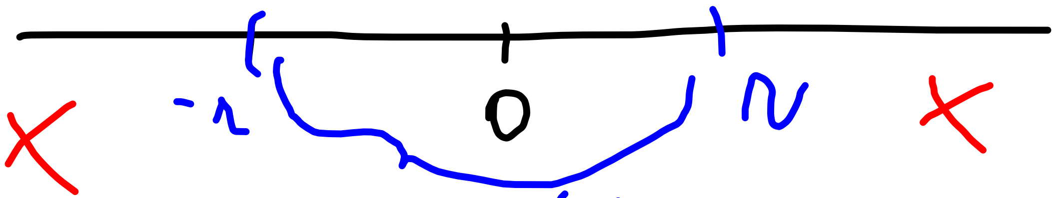
$$\{2^{100\,000}\cdot a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{100\,000} a_n \quad \text{... diverguje}$$

---

(4) jedná se o geometrickou řadu s kvocientem $\frac{1}{(2+i)}$. Její součet bude konečný pokud $\left|\frac{1}{(2+i)}\right| < 1$, to je ovšem splněno $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} < 1\right)$

Pro poloměr konvergence dostáváme následující vztahy:



mocninná řada definuje funkci $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{konverguje?}$$

Odm. kr. $\quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\, x < 1$

$$x < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r$$

$$R = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{\frac{1}{n}}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln n} = e^{0} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ tedy konverguje pro $|x|<1$, diverguje pro $|x|>1$.

navíc pro ~~x~~ $=1$ řada diverguje

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^{\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{2}$$

4) $$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\left|\frac{1}{2+i}\right|} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$$

$b_n \sim 1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \; \ldots 0\,1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot x^n$$

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{b_n}} = \frac{1}{1} = 1$$

Podílovým kritériem:

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2n+3}\right|} = 1$$

pro $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \quad \ldots \quad \text{diverguje}$$

$x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \quad \ldots \quad \text{diverguje}$$

řada konverguje právě pro $x \in (-1,1)$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} \right)} = 0$$

Mocninná řada konverguje pouze pro $x = 0$.