Drsná matematika III – 3. demonstrovaná cvičení
Vázané extrémy

Martin Panák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

3. 10. 2006

Příklad 1. *Určete stacionární body funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y + y^2x - xy$ *a rozhodněte, které z těchto bodů jsou lokální extrémy a jakého druhu.*

Řešení. První derivace jsou $f_x = 2xy + y^2 - y$, $f_y = x^2 + 2xy - x$. Položíme-li obě parciální derivace současně nule, má soustava následující řešení: $\{x = y = 0\}$, $\{x = 0, y = 1\}$, $\{x = 1, y = 0\}$, $\{x = 1/3, y = 1/3\}$, což jsou čtyři stacionární body dané funkce.

Řešení. První derivace jsou $f_x = 2xy + y^2 - y$, $f_y = x^2 + 2xy - x$. Položíme-li obě parciální derivace současně nule, má soustava následující řešení: $\{x = y = 0\}$, $\{x = 0, y = 1\}$, $\{x = 1, y = 0\}$, $\{x = 1/3, y = 1/3\}$, což jsou čtyři stacionární body dané funkce.

Hessián funkce Hf je $\begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y - 1 \\ 2x + 2y - 1 & 2x \end{pmatrix}$.

Řešení. První derivace jsou $f_x = 2xy + y^2 - y$, $f_y = x^2 + 2xy - x$. Položíme-li obě parciální derivace současně nule, má soustava následující řešení: $\{x = y = 0\}$, $\{x = 0, y = 1\}$, $\{x = 1, y = 0\}$, $\{x = 1/3, y = 1/3\}$, což jsou čtyři stacionární body dané funkce.

Hessián funkce Hf je $\begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y - 1 \\ 2x + 2y - 1 & 2x \end{pmatrix}$.

Hodnoty ve stacionárních bodech jsou postupně $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

Řešení. První derivace jsou $f_x = 2xy + y^2 - y$, $f_y = x^2 + 2xy - x$. Položíme-li obě parciální derivace současně nule, má soustava následující řešení: $\{x = y = 0\}$, $\{x = 0, y = 1\}$, $\{x = 1, y = 0\}$, $\{x = 1/3, y = 1/3\}$, což jsou čtyři stacionární body dané funkce.

Hessián funkce Hf je $\begin{pmatrix} 2y & 2x+2y-1 \\ 2x+2y-1 & 2x \end{pmatrix}$.

Hodnoty ve stacionárních bodech jsou postupně $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

tedy první tři Hessiány jsou indefinitní, poslední pak pozitivně definitní, bod $[1/3, 1/3]$ je tedy lokálním minimem. $\square$

Příklad 2. *Určete bod v rovině* $x + y + 3z = 5$ *ležící v* $\mathbb{R}^3$, *který má nejmenší vzdálenost od počátku souřadnic. A to jak metodami lineární algebry, tak metodami diferenciálního počtu.*

Řešení. Jde o patu kolmice spuštěné z bodu $[0,0,0]$ na rovinu. Normála k rovině je $(t,t,3t)$, $t \in \mathbb{R}$. Dosazením do rovnice roviny dostaneme patu kolmice $[5/11, 5/11, 15/11]$.

Řešení. Jde o patu kolmice spuštěné z bodu $[0,0,0]$ na rovinu. Normála k rovině je $(t,t,3t)$, $t \in \mathbb{R}$. Dosazením do rovnice roviny dostaneme patu kolmice $[5/11, 5/11, 15/11]$.
Alternativně minimalizujeme vzdálenost (resp. její kvadrát) bodů v rovině od počátku, tj. funkci dvou proměnných,

$$(5-y-3z)^2 + y^2 + z^2.$$

Položením parciálních derivací rovných nule dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 3y + 10z - 15 &= 0 \\ 2y + 3z - 5 &= 0, \end{aligned}$$

která má řešení jako výše. Protože víme, že minimum existuje a jedná se o jediný stacionární bod, nemusíme už ani počítat Hessián. $\square$

Příklad 3.* *Napište Taylorův rozvoj druhého řádu funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ln(x^2 + y^2 + 1)$ *v bodě* $[1, 1]$.

Nejprve spočítáme první parciální derivace:

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, f_y = \frac{2y}{x^2+y^2+1},$$

poté druhý totální diferenciál daný Hessiánem:

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{2y^2-2x^2+2}{(x^2+y^2+1)^2} & -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \\ -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2} & \frac{2x^2-2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2} \end{pmatrix}.$$

Nejprve spočítáme první parciální derivace:

$$f_x = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, f_y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1},$$

poté druhý totální diferenciál daný Hessiánem:

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{2y^2 - 2x^2 + 2}{(x^2+y^2+1)^2} & -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \\ -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2} & \frac{2x^2 - 2y^2 + 2}{(x^2+y^2+1)^2} \end{pmatrix}.$$

Hodnota Hessiánu v bodě $[1, 1]$ je

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix},$$

celkem tedy již můžeme napsat Taylorův rozvoj druhého řádu v bodě $[1,1]$:

$$\begin{aligned} T^2(f)(1,1) &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(x-1, y-1)Hf(1,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ &= \ln(3) + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-1) + \frac{1}{9}(x-1)^2 - \\ &\quad - \frac{4}{9}(x-1)(y-1) + \frac{1}{9}(y-1)^2 \\ &= \frac{1}{9}(x^2 + y^2 + 8x + 8y - 4xy - 14) + \ln(3). \end{aligned}$$

1. Domácí úlohy z minulého týdne
   - Příklad 1
   - Příklad 2
   - Příklad 3

2. Návodné úlohy
   - Příklad 4.
   - Příklad 5.
   - Příklad 6.
   - Příklad 7.
   - Příklad 8.

Ukažte, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = e^x \sin(y) + e^y \sin(x)$$

definuje předpisem $f(x,y) - 1 = 0$ pro $(x,y) \in \langle 0, \pi/2\rangle \times \langle 0, \pi/2\rangle$ implicitně proměnnou y jako funkci proměnné x, $y = f(x)$. Určete $f'(x)$.

Buď

$$F(x, y, z) = \sin(xy) + \sin(yz) + \sin(zx) - 1.$$

. Ukažte, že předpis $F(x, y, z) = 0$ zadává v okolí bodu $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}, 0)$ implicitně funkci $z = f(x, y)$ takovou, že $F(x, y, f(x, y)) = 0$.
Určete $f_x(\sqrt{\pi/2})$ a $f_y(\sqrt{\pi/2})$.

Nalezněte poměr stran obdélníkové budky, o které jsou známy následující informace: má být uzavřená ze tří stran, je dána její výška a rovněž je pevně dán obsah 10 m^2 jejího půdorysu, požadujeme-li, aby bylo množství materiálu použitého na obvod budky co nejmenší.

Rozhodněte, zda existují maxima a minima funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - 2y$ na křivce dané rovnicí

$$y - x^3 - 2x - 1 = 0.$$

Rozhodněte, zda existují maxima a minima funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - 2y$ na křivce dané rovnicí

$$y - x^3 - 2x - 1 = 0.$$

Uvažujte křivku omezenou na interval $x \in \langle 0, 5 \rangle$.

Určete, zda existují maxima a minima funkce
$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na

a) na paraboloidu

$$z = x^2 + y^2.$$

Určete, zda existují maxima a minima funkce
$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na

a) na paraboloidu

$$z = x^2 + y^2.$$

b) na elipse

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad x - y + z + 1 = 0.$$