

PŘÍKLAD 1. Zapište obě možnosti pořadí integrace funkce  $f(x, y)$  na množině ohraničené osou  $y$ , grafem funkce  $y = e^x$  a přímkou procházející body  $[1, e]$ ,  $[0, 2e]$ .

PŘÍKLAD 2. Pomocí trojného integrálu odvoďte známý vzorec pro objem koule.  
[Návod: Uvažujte kouli o poloměru  $R$  se středem v počátku a využijte transformace do sférických souřadnic.]

PŘÍKLAD 3. Určete hmotnost tělesa, které je průnikem koule  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  a válce  $x^2 + y^2 \leq 1$  v poloprostoru  $z \geq 0$  a jehož hustota je v bodě  $[x, y, z]$  rovna kolmé vzdálenosti tohoto bodu od roviny  $xy$ .

PŘÍKLAD 4. Pomocí složeného lichoběžníkového pravidla s uzly  $0, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$  odhadněte hodnotu integrálu

$$\int_0^1 \sin(\pi x^2) \, dx.$$

PŘÍKLAD 5. Vypočtěte integrál

$$\int_{\frac{3}{\sqrt{2}}}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dy \, dx.$$

[Návod: Použijte transformaci do polárních souřadnic.]

ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 1.  *Ihned z obrázku:*

$$\int_0^1 \int_{e^x}^{2e-ex} f(x, y) \, dy \, dx = \int_1^e \int_0^{\ln y} f(x, y) \, dx \, dy + \int_e^{2e} \int_0^{2-\frac{y}{e}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 2.  $r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi], V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 3.  *Transformací do cylindrických souřadnic (a integrací polynomu) =  $\frac{7}{4}\pi$ .*

ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 4.  $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \approx 0.47$

ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 5.  *Těžší příklad – v mezích je závislost a použití substituce  $t = \sin \varphi$  vede na (jednoduché) parciální zlomky. Celkem =  $\frac{3}{4}\pi - \frac{3\sqrt{2}}{4} \ln(3 + 2\sqrt{2})$ .*