Matematika III – 12. přednáška
Vytvořující funkce

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

4. 12. 2007

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, *e*-text.
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, **Kapitoly z diskrétní matematiky**, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.
  H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž `http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html`)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Hledáme zjevně čísla i, j a k taková, že $i + j + k = 22$ a zároveň

$$i \in \{0, 1, 2, 3, 4\},\ j \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\},\ k \in \{0, 5, 10, 15\}.$$

Uvažme součin polynomů (třeba nad reálnými čísly)

$$(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4)(x^0+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})(x^0+x^5+x^{10}+x^{15}).$$

Mělo by být zřejmé, že hledaný počet řešení je díky (Cauchyovskému) způsobu násobení polynomů právě koeficient u x^{22} ve výsledném polynomu. Skutečně tak dostáváme **čtyři možnosti** $3*5+3*2+1*1$, $3*5+2*2+3*1$, $2*5+5*2+2*1$ a $2*5+4*2+4*1$.

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah". Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť I, J jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané $r \in \mathbb{N}$ počet řešení (i, j) rovnice $i + j = r$ splňujících $i \in I, j \in J$ roven koeficientu u x^r v polynomu $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Hledáme přirozená čísla $a_1, a_2, a_5, a_{10}, a_{20}$ a a_{50} taková, že a_i je násobkem i pro všechna $i \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ a zároveň $a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} + a_{20} + a_{50} = 100$. Podobně jako výše je vidět, že požadovaný počet lze získat jako koeficient u x^{100} v

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)$$
$$(1 + x^{10} + x^{20} + \dots)(1 + x^{20} + x^{40} + \dots)(1 + x^{50} + x^{100} + \dots)$$

Podobným způsobem můžeme znovu velmi snadno odvodit některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějška. Využijeme přitom **binomickou větu.**

Věta (binomická)

Pro $n \in \mathbb{N}$ a $r \in \mathbb{R}$ platí

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

Na levou stranu se můžeme dívat jako na součin n polynomů, pravá je zápisem polynomu vzniklého jejich roznásobením. Dosazením čísel $x = 1$, resp. $x = -1$ dostáváme známé vzorce:

Důsledek

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,
- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Podíváme se teď na obě strany v binomické větě „spojitýma očima" a s využitím vlastností derivací odvodíme další vztah mezi kombinačními čísly.

Důsledek

Platí

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Důkaz.

Na obě strany binomické věty se podíváme jako na polynomiální funkce. Derivací levé strany dostaneme $n(1+x)^{n-1}$, derivací pravé strany (člen po členu) pak $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$. Dosazením $x = 1$ dostaneme tvrzení. $\square$

(Formální) mocninné řady

Definice

Buď dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Poznámka

O **formální** mocninné řadě hovoříme proto, že se zatím na tuto řadu díváme čistě formálně jako na jiný zápis dané posloupnosti a nezajímáme se o konvergenci. Na druhou stranu to ale znamená, že formální mocninná řada není funkce a nemůžeme do ní dosazovat. To ovšem vzápětí napravíme, když s využitím znalostí z analýzy nekonečných řad přejdeme od formálních mocninnných řad k příslušným funkcím.

Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro $x \in (0, 1)$ a její součet je roven funkci $1/(1 - x)$. Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvořujících funkcí.

Jak jsme již zmínili, tento obrat lze ale použít pouze tehdy, pokud víme, že řada alespoň v nějakém okolí 0 konverguje. Často ale „diskrétní“ matematici používají následující „podvod“:

- pomocí formálních mocninných řad odvodí nějaký vztah (formuli, rekurenci,...) bez toho, aby se zajímali o konvergenci
- jinými prostředky (často matematickou indukcí) tento vztah dokážou

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro n-tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;
- výpočet průměrů či jiných statistických závislostí (např. průměrná složitost algoritmu);
- důkaz různých identit;
- často je nalezení přesného vztahu příliš obtížné, ale mnohdy stačí vztah přibližný nebo asymptotické chování.

Exponenciální vytvořující funkce

Kromě výše zmíněných vytvořujících funkcí se v praxi rovněž často objevují jejich tzv. *exponenciální* varianty.

$$g(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}.$$

Poznámka

Jméno vychází z toho, že exponenciální funkce e^x je (exponenciální) vytvořujícífunkcí pro základní posloupnost $(1, 1, 1, 1, \dots)$.
Později ukážeme některé příklady (např. Cayleyho větu), kdy je použití exponenciálních vytvořujících funkcí výhodnější.

Dosazování do mocninných řad

Následující větu znáte z matematické analýzy z loňského semestru:

Věta

Buď $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké* $K \in \mathbb{R}$, *že pro všechna* $n \geq 1$ *je* $|a_n| \leq K^n$, *pak řada*

$$a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$. *Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž* $a(x)$. *Hodnotami funkce* $a(x)$ *na libovolném okolí 0 je jednoznačně určena původní posloupnost, neboť má* $a(x)$ *v 0 derivace všech řádů a platí*

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o k míst (tj. vynechání prvních k míst posloupnosti) nejprve od $a(x)$ odečteme polynom $b_k(x)$ odpovídají posloupnosti $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$ a poté podělíme vytvořující funkci x^k.
- Substitucí polynomu $f(x)$ s nulovým absolutním členem za x vytvoříme specifické kombinace členů původní posloupnosti. Jednoduše je vyjádříme pro $f(x) = \alpha x$, což odpovídá vynásobení k–tého členu posloupnosti skalárem α^k. Dosazení $f(x) = x^n$ nám do posloupnosti mezi každé dva členy vloží $n - 1$ nul.

Příklad

Viděli jsme, že $1/(1-x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti ze samých jedniček. Substitucí $2x$ za x tak dostaneme tvrzení, že $1/(1-2x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 2, 4, 8, \dots)$.
S využitím substituce $-x$ za x dostaneme, že je-li $a(x)$ vytvořující pro $(a_0, a_1, \dots)$, je $(a(x) + a(-x))/2$ vytvořující pro $a_0, 0, a_2, 0, \dots)$.

Příklad

Určete vytvořující funkci posloupnosti

$$(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots).$$

Řešení

Podle předchozího příkladu je $1/(1-2x)$ vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 2, 4, 8, \dots)$. Substitucí x^2 za x dostaneme vytvořující funkci $1/(1-2x^2)$ pro $(1, 0, 2, 0, 4, 0, \dots)$ a celkem pak je $(1+x)/(1-2x^2)$ hledanou vytvořující funkcí.

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrování: funkce $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$, pro $k \geq 1$ je člen s indexem k je $\frac{1}{k}a_{k-1}$ (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce $a(x)$).
- Násobení řad: součin $a(x)b(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde

  $$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

  (tj. členy v součinu až po c_k jsou stejné jako v součinu $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots b_kx^k)$. Posloupnost c bývá také nazývána *konvolucí* posloupností a, b.

Příklad

Jaká je vytvořující funkce pro posloupnost druhých mocnin $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$?

Řešení

Lze očekávat, že bude snazší bude nejprve určit vytvořující funkce pro $(1, 2, 3, \ldots)$. Podle předchozího víme, že $1/(1-x)$ vytvoří posloupnost samých jedniček a její derivace $1/(1-x)^2$ pak posloupnost $(1, 2, 3, \ldots)$. Jak ale zjistit funkci odpovídající druhým mocninám? Druhou derivací dostaneme $2/(1-x)^3$, k ní odpovídající posloupnost je $(1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \ldots)$, jejíž člen s indexem k je $(k+2)(k+1)$. Snadno vidíme, že výslednou vytvořující funkcí je tedy

$$a(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Příklad

Uvažme jeden speciální případ násobení vytvořujících funkcí $a(x)$ a $b(x)$, je-li $a(x) = 1/(1-x)$. Pak konvolucí příslušných posloupností je posloupnost, jejíž vytvořující funkce je dána mocninnou řadou

$$
\begin{aligned}
&(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) = \\
&= b_0 + (b_0 + b_1)x + (b_0 + b_1 + b_2)x^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

Vyjádřeno slovy, vynásobením funkce $b(x)$ funkcí $1/(1-x)$ dostaneme vytvořující funkci posloupnosti částečných součtů původní posloupnosti $(b_0, b_1, b_2, \dots)$.

Přehled mocninných řad:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n,$$

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n},$$

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k.$$

Poznámka

- Poslední vzorec

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k$$

je tzv. **zobecněná binomická věta**, kde pro $r \in \mathbb{R}$ je binomický koeficient definován vztahem

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Speciálně klademe $\binom{r}{0} = 1$.

- Pro $n \in \mathbb{N}$ z uvedeného vztahu snadno dostaneme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} x + \cdots + \binom{n+k-1}{n-1} x^k + \cdots .$$

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice. Našim cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti. Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Pak zřejmě

$$F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x,$$

a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Příklad – pokr.

Našim cílem je odvodit vztah pro n-tý člen posloupnosti odpovídající vytvořující funkci $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.
Využijeme k tomu rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny polynomu $1-x-x^2$ a A, B vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek. Po substituci $\lambda_1 = 1/x_1, \lambda_2 = 1/x^2$ dostáváme vztah

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-\lambda_1 x} + \frac{b}{1-\lambda_2 x},$$

odkud snadno pomocí znalostí o vytvořujících funkcích

$$F_n = a \cdot \lambda_1^n + b \cdot \lambda_2^n.$$

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.
Uvážíme-li navíc, že $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_n snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$. Navíc je vidět, že $\lim_{n\to\infty} F_n/F_{n+1} = 1/\lambda_1 \approx 0.618$, což je poměr známý jako zlatý řez – objevuje se již od antiky v architektuře, výtvarném umění i hudbě.
Analogický postup je možné použít při řešení obecných lineárních diferenčních rovnic k-tého stupně s konstatními koeficienty. Má-li charakteristická rovnice jednoduché kořeny, je situace jednodušší – viz dříve.

Pěstované binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n pěstovaných binárních stromů na n vrcholech. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro $n \geq 1$ vyhovuje b_n rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

Nechť $b(x)$ je odpovídající vytvořující funkce. Pravá strana uvedené rekurence je vlastně koeficientem u x^{n-1} v součinu $b(x) \cdot b(x)$, tj. členem u x^n v $xb(x)^2$. Je tedy $xb(x)^2$ vytvořující po tutéž posloupnost jako $b(x)$ s výjimkou prvního členu. Tedy $b(x) = 1 + xb(x)^2$, z čehož dostaneme (pro x pevně zvolené)

$$b(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Pěstované binární stromy – pokr.

Ve vzorci

$$b(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

ale znaménko $+$ nepřichází v úvahu, protože pro $x \to 0_+$ má limitu ∞, zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu $b_0 = 1$.

Pomocí zobecněné binomické věty pak získáme rozvoj

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k$$

a po vydělení $1 - \sqrt{1-4x}$ výrazem $2x$ (tj. posunem vlevo a vydělením 2) dostaneme

$$b_n = -\frac{1}{2}(-4)^{n+1} \binom{1/2}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

což jsou známá (a významná) **Catalanova čísla**.

Catalanova čísla

Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně fronty u pokladny (5koruny a 10koruny) tak, aby nezásobená pokladna mohla vždy vrátit (zároveň dostaneme pravděpodobnost, že náhodná fronta „projde“)
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet *monotónních* cest z $[0, 0]$ do $[n, n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet různých triangulací konvexního $(n + 2)$-úhelníku.