

# Matematika III – 12. přednáška

## Vytvořující funkce

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

4. 12. 2007

# Obsah přednášky

- 1 Vytvořující funkce
- 2 Operace s vytvořujícími funkcemi
  - Přehled mocninných řad
- 3 Aplikace vytvořujících funkcí

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, e-text.

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, e-text.
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, **Kapitoly z diskrétní matematiky**, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, e-text.
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, **Kapitoly z diskrétní matematiky**, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.  
H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž  
<http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>)

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, e-text.
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, **Kapitoly z diskrétní matematiky**, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.  
H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž  
<http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.

# Plán přednášky

- 1 Vytvořující funkce
- 2 Operace s vytvořujícími funkcemi
  - Přehled mocninných řad
- 3 Aplikace vytvořujících funkcí

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*



Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

### Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

# Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

## Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Hledáme zjevně čísla  $i$ ,  $j$  a  $k$  taková, že  $i + j + k = 22$  a zároveň

$$i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, j \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, k \in \{0, 5, 10, 15\}.$$

Uvažme součin polynomů (třeba nad reálnými čísly)

$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)(x^0 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})(x^0 + x^5 + x^{10} + x^{15}).$$

Mělo by být zřejmé, že hledaný počet řešení je díky (Cauchyovskému) způsobu násobení polynomů právě koeficient u  $x^{22}$  ve výsledném polynomu.

# Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

## Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Hledáme zjevně čísla  $i$ ,  $j$  a  $k$  taková, že  $i + j + k = 22$  a zároveň

$$i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, j \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, k \in \{0, 5, 10, 15\}.$$

Uvažme součin polynomů (třeba nad reálnými čísly)

$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)(x^0 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})(x^0 + x^5 + x^{10} + x^{15}).$$

Mělo by být zřejmé, že hledaný počet řešení je díky (Cauchyovskému) způsobu násobení polynomů právě koeficient u  $x^{22}$  ve výsledném polynomu. Skutečně tak dostáváme **čtyři**

**možnosti**  $3 * 5 + 3 * 2 + 1 * 1$ ,  $3 * 5 + 2 * 2 + 3 * 1$ ,

$2 * 5 + 5 * 2 + 2 * 1$  a  $2 * 5 + 4 * 2 + 4 * 1$ .

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť  $I, J$  jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané  $r \in \mathbb{N}$  počet řešení  $(i, j)$  rovnice  $i + j = r$  splňujících  $i \in I, j \in J$  roven koeficientu u  $x^r$  v polynomu  $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$ .

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť  $I, J$  jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané  $r \in \mathbb{N}$  počet řešení  $(i, j)$  rovnice  $i + j = r$  splňujících  $i \in I, j \in J$  roven koeficientu u  $x^r$  v polynomu  $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$ .

### Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť  $I, J$  jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané  $r \in \mathbb{N}$  počet řešení  $(i, j)$  rovnice  $i + j = r$  splňujících  $i \in I, j \in J$  roven koeficientu u  $x^r$  v polynomu  $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$ .

### Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Hledáme přirozená čísla  $a_1, a_2, a_5, a_{10}, a_{20}$  a  $a_{50}$  taková, že  $a_i$  je násobkem  $i$  pro všechna  $i \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$  a zároveň  $a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} + a_{20} + a_{50} = 100$ .

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť  $I, J$  jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané  $r \in \mathbb{N}$  počet řešení  $(i, j)$  rovnice  $i + j = r$  splňujících  $i \in I, j \in J$  roven koeficientu u  $x^r$  v polynomu  $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$ .

### Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Hledáme přirozená čísla  $a_1, a_2, a_5, a_{10}, a_{20}$  a  $a_{50}$  taková, že  $a_i$  je násobkem  $i$  pro všechna  $i \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$  a zároveň  $a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} + a_{20} + a_{50} = 100$ . Podobně jako výše je vidět, že požadovaný počet lze získat jako koeficient u  $x^{100}$  v

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \\ (1 + x^{10} + x^{20} + \dots)(1 + x^{20} + x^{40} + \dots)(1 + x^{50} + x^{100} + \dots)$$



Podobným způsobem můžeme znovu velmi snadno odvodit některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějška. Využijeme přitom **binomickou větu**.

Podobným způsobem můžeme znovu velmi snadno odvodit některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějších. Využijeme přitom **binomickou větu**.

### Věta (binomická)

*Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $r \in \mathbb{R}$  platí*

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

Na levou stranu se můžeme dívat jako na součin  $n$  polynomů, pravá je zápisem polynomu vzniklého jejich roznásobením.

Podobným způsobem můžeme znovu velmi snadno odvodit některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějška. Využijeme přitom **binomickou větu**.

### Věta (binomická)

*Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $r \in \mathbb{R}$  platí*

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

Na levou stranu se můžeme dívat jako na součin  $n$  polynomů, pravá je zápisem polynomu vzniklého jejich roznásobením.

Dosazením čísel  $x = 1$ , resp.  $x = -1$  dostáváme známé vzorce:

### Důsledek

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ,
- $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ .

Podíváme se teď na obě strany v binomické větě „spojitýma očima“ a s využitím vlastností derivací odvodíme další vztah mezi kombinačními čísly.

### Důsledek

*Platí*

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Podíváme se teď na obě strany v binomické větě „spojitýma očima“ a s využitím vlastností derivací odvodíme další vztah mezi kombinačními čísly.

### Důsledek

*Platí*

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

### Důkaz.

Na obě strany binomické věty se podíváme jako na polynomiální funkce. Derivací levé strany dostaneme  $n(1+x)^{n-1}$ , derivací pravé strany (člen po členu) pak  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$ . Dosazením  $x = 1$  dostaneme tvrzení. □

# (Formální) mocninné řady

## Definice

Buď dána nekonečná posloupnost  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ . Její **vytvořující funkci** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

# (Formální) mocninné řady

## Definice

Buď dána nekonečná posloupnost  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ . Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

## Poznámka

O **formální** mocninné řadě hovoříme proto, že se zatím na tuto řadu díváme čistě formálně jako na jiný zápis dané posloupnosti a nezajímáme se o konvergenci. Na druhou stranu to ale znamená, že formální mocninná řada není funkce a nemůžeme do ní dosazovat.

# (Formální) mocninné řady

## Definice

Buď dána nekonečná posloupnost  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ . Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

## Poznámka

O **formální** mocninné řadě hovoříme proto, že se zatím na tuto řadu díváme čistě formálně jako na jiný zápis dané posloupnosti a nezajímáme se o konvergenci. Na druhou stranu to ale znamená, že formální mocninná řada není funkce a nemůžeme do ní dosazovat. To ovšem vzápětí napravíme, když s využitím znalostí z analýzy nekonečných řad přejdeme od formálních mocninných řad k příslušným funkcím.



## Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ . Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro  $x \in (0, 1)$  a její součet je roven funkci  $1/(1 - x)$ . Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvořujících funkcí.

## Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ . Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro  $x \in (0, 1)$  a její součet je roven funkci  $1/(1 - x)$ . Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvořujících funkcí.

Jak jsme již zmínili, tento obrat lze ale použít pouze tehdy, pokud víme, že řada alespoň v nějakém okolí 0 konverguje. Často ale „diskrétní“ matematici používají následující „podvod“:

- pomocí formálních mocninných řad odvodí nějaký vztah (formuli, rekurenci, ...) bez toho, aby se zajímali o konvergenci

## Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ . Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro  $x \in (0, 1)$  a její součet je roven funkci  $1/(1 - x)$ . Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvořujících funkcí.

Jak jsme již zmínili, tento obrat lze ale použít pouze tehdy, pokud víme, že řada alespoň v nějakém okolí 0 konverguje. Často ale „diskrétní“ matematici používají následující „podvod“:

- pomocí formálních mocninných řad odvodí nějaký vztah (formuli, rekurenci, ...) bez toho, aby se zajímali o konvergenci
- jinými prostředky (často matematickou indukcí) tento vztah dokážou

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro  $n$ -tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro  $n$ -tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;
- výpočet průměrů či jiných statistických závislostí (např. průměrná složitost algoritmu);

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro  $n$ -tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;
- výpočet průměrů či jiných statistických závislostí (např. průměrná složitost algoritmu);
- důkaz různých identit;
- často je nalezení přesného vztahu příliš obtížné, ale mnohdy stačí vztah přibližný nebo asymptotické chování.

# Exponenciální vytvořující funkce

Kromě výše zmíněných vytvořujících funkcí se v praxi rovněž často objevují jejich tzv. *exponenciální* varianty.

$$g(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}.$$

# Exponenciální vytvořující funkce

Kromě výše zmíněných vytvořujících funkcí se v praxi rovněž často objevují jejich tzv. *exponenciální* varianty.

$$g(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}.$$

## Poznámka

Jméno vychází z toho, že exponenciální funkce  $e^x$  je (exponenciální) vytvořující funkcí pro základní posloupnost  $(1, 1, 1, 1, \dots)$ .

Později ukážeme některé příklady (např. Cayleyho větu), kdy je použití exponenciálních vytvořujících funkcí výhodnější.



# Dosazování do mocninných řad

Následující větu znáte z matematické analýzy z loňského semestru:

## Věta

*Bud'  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké  $K \in \mathbb{R}$ , že pro všechna  $n \geq 1$  je  $|a_n| \leq K^n$ , pak řada*

$$a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

*konverguje pro každé  $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ . Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž  $a(x)$ .*

# Dosazování do mocninných řad

Následující větu znáte z matematické analýzy z loňského semestru:

## Věta

*Bud'  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké  $K \in \mathbb{R}$ , že pro všechna  $n \geq 1$  je  $|a_n| \leq K^n$ , pak řada*

$$a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

*konverguje pro každé  $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ . Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž  $a(x)$ . Hodnotami funkce  $a(x)$  na libovolném okolí 0 je jednoznačně určena původní posloupnost, neboť má  $a(x)$  v 0 derivace všech řádů a platí*

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

# Plán přednášky

- 1 Vytvořující funkce
- 2 Operace s vytvořujícími funkcemi
  - Přehled mocninných řad
- 3 Aplikace vytvořujících funkcí

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání  $(a_i + b_i)$  posloupností člen po členu odpovídá součet  $a(x) + b(x)$  příslušných vytvořujících funkcí.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání  $(a_i + b_i)$  posloupností člen po členu odpovídá součet  $a(x) + b(x)$  příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení  $(\alpha \cdot a_i)$  všech členů posloupnosti stejným skalárem  $\alpha$  odpovídá vynásobení  $\alpha \cdot a(x)$  příslušné vytvořující funkce.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání  $(a_i + b_i)$  posloupností člen po členu odpovídá součet  $a(x) + b(x)$  příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení  $(\alpha \cdot a_i)$  všech členů posloupnosti stejným skalárem  $\alpha$  odpovídá vynásobení  $\alpha \cdot a(x)$  příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce  $a(x)$  monomem  $x^k$  odpovídá posunutí posloupnosti doprava o  $k$  míst a její doplnění nulami.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání  $(a_i + b_i)$  posloupností člen po členu odpovídá součet  $a(x) + b(x)$  příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení  $(\alpha \cdot a_i)$  všech členů posloupnosti stejným skalárem  $\alpha$  odpovídá vynásobení  $\alpha \cdot a(x)$  příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce  $a(x)$  monomem  $x^k$  odpovídá posunutí posloupnosti doprava o  $k$  míst a její doplnění nulami.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o  $k$  míst (tj. vynechání prvních  $k$  míst posloupnosti) nejprve od  $a(x)$  odečteme polynom  $b_k(x)$  odpovídající posloupnosti  $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$  a poté podělíme vytvořující funkci  $x^k$ .



Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání  $(a_i + b_i)$  posloupností člen po členu odpovídá součet  $a(x) + b(x)$  příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení  $(\alpha \cdot a_i)$  všech členů posloupnosti stejným skalárem  $\alpha$  odpovídá vynásobení  $\alpha \cdot a(x)$  příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce  $a(x)$  monomem  $x^k$  odpovídá posunutí posloupnosti doprava o  $k$  míst a její doplnění nulami.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o  $k$  míst (tj. vynechání prvních  $k$  míst posloupnosti) nejprve od  $a(x)$  odečteme polynom  $b_k(x)$  odpovídající posloupnosti  $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$  a poté podělíme vytvořující funkci  $x^k$ .
- Substitucí polynomu  $f(x)$  s nulovým absolutním členem za  $x$  vytvoříme specifické kombinace členů původní posloupnosti. Jednoduše je vyjádříme pro  $f(x) = \alpha x$ , což odpovídá vynásobení  $k$ -tého členu posloupnosti skalárem  $\alpha^k$ . Dosazení  $f(x) = x^n$  nám do posloupnosti mezi každé dva členy vloží  $n - 1$  nul.

## Příklad

Viděli jsme, že  $1/(1 - x)$  je vytvořující funkcí posloupnosti ze samých jedniček. Substitucí  $2x$  za  $x$  tak dostaneme tvrzení, že  $1/(1 - 2x)$  je vytvořující funkcí posloupnosti  $(1, 2, 4, 8, \dots)$ .

## Příklad

Viděli jsme, že  $1/(1-x)$  je vytvořující funkcí posloupnosti ze samých jedniček. Substitucí  $2x$  za  $x$  tak dostaneme tvrzení, že  $1/(1-2x)$  je vytvořující funkcí posloupnosti  $(1, 2, 4, 8, \dots)$ .

S využitím substitute  $-x$  za  $x$  dostaneme, že je-li  $a(x)$  vytvořující pro  $(a_0, a_1, \dots)$ , je  $(a(x) + a(-x))/2$  vytvořující pro  $(a_0, 0, a_2, 0, \dots)$ .

## Příklad

Viděli jsme, že  $1/(1-x)$  je vytvořující funkcí posloupnosti ze samých jedniček. Substitucí  $2x$  za  $x$  tak dostaneme tvrzení, že  $1/(1-2x)$  je vytvořující funkcí posloupnosti  $(1, 2, 4, 8, \dots)$ .

S využitím substitute  $-x$  za  $x$  dostaneme, že je-li  $a(x)$  vytvořující pro  $(a_0, a_1, \dots)$ , je  $(a(x) + a(-x))/2$  vytvořující pro  $(a_0, 0, a_2, 0, \dots)$ .

## Příklad

Určete vytvořující funkci posloupnosti

$$(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots).$$

## Příklad

Viděli jsme, že  $1/(1-x)$  je vytvořující funkcí posloupnosti ze samých jedniček. Substitucí  $2x$  za  $x$  tak dostaneme tvrzení, že  $1/(1-2x)$  je vytvořující funkcí posloupnosti  $(1, 2, 4, 8, \dots)$ .

S využitím substituce  $-x$  za  $x$  dostaneme, že je-li  $a(x)$  vytvořující pro  $(a_0, a_1, \dots)$ , je  $(a(x) + a(-x))/2$  vytvořující pro  $(a_0, 0, a_2, 0, \dots)$ .

## Příklad

Určete vytvořující funkci posloupnosti

$$(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots).$$

## Řešení

Podle předchozího příkladu je  $1/(1-2x)$  vytvořující funkcí posloupnosti  $(1, 2, 4, 8, \dots)$ . Substitucí  $x^2$  za  $x$  dostaneme vytvořující funkci  $1/(1-2x^2)$  pro  $(1, 0, 2, 0, 4, 0, \dots)$  a celkem pak je  $(1+x)/(1-2x^2)$  hledanou vytvořující funkcí.

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle  $x$ : funkce  $a'(x)$  vytvořuje posloupnost  $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$ , člen s indexem  $k$  je  $(k + 1)a_{k+1}$  (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle  $x$ : funkce  $a'(x)$  vytvořuje posloupnost  $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$ , člen s indexem  $k$  je  $(k+1)a_{k+1}$  (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrovaní: funkce  $\int_0^x a(t) dt$  vytvořuje posloupnost  $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$ , pro  $k \geq 1$  je člen s indexem  $k$  je  $\frac{1}{k}a_{k-1}$  (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce  $a(x)$ ).

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle  $x$ : funkce  $a'(x)$  vytvořuje posloupnost  $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$ , člen s indexem  $k$  je  $(k+1)a_{k+1}$  (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrovaní: funkce  $\int_0^x a(t) dt$  vytvořuje posloupnost  $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$ , pro  $k \geq 1$  je člen s indexem  $k$  je  $\frac{1}{k}a_{k-1}$  (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce  $a(x)$ ).
- Násobení řad: součin  $a(x)b(x)$  je vytvořující funkcí posloupnosti  $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ , kde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

(tj. členy v součinu až po  $c_k$  jsou stejné jako v součinu  $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k)$ . Posloupnost  $c$  bývá také nazývána *konvolucí* posloupností  $a, b$ .



## Příklad

Jaká je vytvořující funkce pro posloupnost druhých mocnin  $(1^2, 2^2, 3^2, \dots)$  ?

## Řešení

Lze očekávat, že bude snazší bude nejprve určit vytvořující funkce pro  $(1, 2, 3, \dots)$ . Podle předchozího víme, že  $1/(1-x)$  vytvoří posloupnost samých jedniček a její derivace  $1/(1-x)^2$  pak posloupnost  $(1, 2, 3, \dots)$ . Jak ale zjistit funkci odpovídající druhým mocninám?

## Příklad

Jaká je vytvořující funkce pro posloupnost druhých mocnin  $(1^2, 2^2, 3^2, \dots)$  ?

## Řešení

Lze očekávat, že bude snazší bude nejprve určit vytvořující funkce pro  $(1, 2, 3, \dots)$ . Podle předchozího víme, že  $1/(1-x)$  vytvoří posloupnost samých jedniček a její derivace  $1/(1-x)^2$  pak posloupnost  $(1, 2, 3, \dots)$ . Jak ale zjistit funkci odpovídající druhým mocninám? Druhou derivací dostaneme  $2/(1-x)^3$ , k ní odpovídající posloupnost je  $(1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots)$ , jejíž člen s indexem  $k$  je  $(k+2)(k+1)$ . Snadno vidíme, že výslednou vytvořující funkcí je tedy

$$a(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}.$$

## Příklad

Uvažme jeden speciální případ násobení vytvořujících funkcí  $a(x)$  a  $b(x)$ , je-li  $a(x) = 1/(1-x)$ . Pak konvolucí příslušných posloupností je posloupnost, jejíž vytvořující funkce je dána mocninnou řadou

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) &= \\ &= b_0 + (b_0 + b_1)x + (b_0 + b_1 + b_2)x^2 + \dots\end{aligned}$$

Vyjádřeno slovy, vynásobením funkce  $b(x)$  funkcí  $1/(1-x)$  dostaneme vytvořující funkci posloupnosti částečných součtů původní posloupnosti  $(b_0, b_1, b_2, \dots)$ .

## Přehled mocninných řad:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n,$$

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n},$$

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k.$$

## Poznámka

- Poslední vzorec

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k$$

je tzv. **zobecněná binomická věta**, kde pro  $r \in \mathbb{R}$  je binomický koeficient definován vztahem

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Speciálně klademe  $\binom{r}{0} = 1$ .

## Poznámka

- Poslední vzorec

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k$$

je tzv. **zobecněná binomická věta**, kde pro  $r \in \mathbb{R}$  je binomický koeficient definován vztahem

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Speciálně klademe  $\binom{r}{0} = 1$ .

- Pro  $n \in \mathbb{N}$  z uvedeného vztahu snadno dostaneme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1}x + \cdots + \binom{n+k-1}{n-1}x^k + \cdots$$

# Plán přednášky

- 1 Vytvořující funkce
- 2 Operace s vytvořujícími funkcemi
  - Přehled mocninných řad
- 3 Aplikace vytvořujících funkcí

# Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice. Naším cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet  $n$ -tého členu posloupnosti.



# Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice. Naším cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet  $n$ -tého členu posloupnosti. Uvažme vytvořující funkci  $F(x)$  Fibonacciho posloupnosti. Pak zřejmě

$$F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x,$$

a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

## Příklad – pokr.

Naším cílem je odvodit vztah pro  $n$ -tý člen posloupnosti odpovídající vytvořující funkci  $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ .

## Příklad – pokr.

Naším cílem je odvodit vztah pro  $n$ -tý člen posloupnosti odpovídající vytvořující funkci  $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ .

Využijeme k tomu rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$$

kde  $x_1, x_2$  jsou kořeny polynomu  $1-x-x^2$  a  $A, B$  vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek.

## Příklad – pokr.

Naším cílem je odvodit vztah pro  $n$ -tý člen posloupnosti odpovídající vytvořující funkci  $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ .  
Využijeme k tomu rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$$

kde  $x_1, x_2$  jsou kořeny polynomu  $1-x-x^2$  a  $A, B$  vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek. Po substituci  $\lambda_1 = 1/x_1, \lambda_2 = 1/x_2$  dostáváme vztah

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-\lambda_1 x} + \frac{b}{1-\lambda_2 x},$$

odkud snadno pomocí znalostí o vytvořujících funkcích

$$F_n = a \cdot \lambda_1^n + b \cdot \lambda_2^n.$$

## Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.

## Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.

Uvážíme-li navíc, že  $(1 - \sqrt{5})/2 \approx -0.618$ , vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze  $F_n$  snadno spočítat zaokrouhlením čísla  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$ .

## Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.

Uvážíme-li navíc, že  $(1 - \sqrt{5})/2 \approx -0.618$ , vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze  $F_n$  snadno spočítat zaokrouhlením čísla  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$ . Navíc je vidět, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n / F_{n+1} = 1/\lambda_1 \approx 0.618$ , což je poměr známý jako zlatý řez – objevuje se již od antiky v architektuře, výtvarném umění i hudbě.

## Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.

Uvážíme-li navíc, že  $(1 - \sqrt{5})/2 \approx -0.618$ , vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze  $F_n$  snadno spočítat zaokrouhlením čísla

$\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$ . Navíc je vidět, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n / F_{n+1} = 1/\lambda_1 \approx 0.618$ , což je poměr známý jako zlatý řez – objevuje se již od antiky v architektuře, výtvarném umění i hudbě.

Analogický postup je možné použít při řešení obecných lineárních diferenčních rovnic  $k$ -tého stupně s konstantními koeficienty. Má-li charakteristická rovnice jednoduché kořeny, je situace jednodušší – viz dříve.



# Pěstované binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet  $b_n$  pěstovaných binárních stromů na  $n$  vrcholech.

# Pěstované binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet  $b_n$  pěstovaných binárních stromů na  $n$  vrcholech. Prozkoumáním případů pro malá  $n$  vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

# Pěstované binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet  $b_n$  pěstovaných binárních stromů na  $n$  vrcholech. Prozkoumáním případů pro malá  $n$  vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro  $n \geq 1$  vyhovuje  $b_n$  rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

# Pěstované binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet  $b_n$  pěstovaných binárních stromů na  $n$  vrcholech. Prozkoumáním případů pro malá  $n$  vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro  $n \geq 1$  vyhovuje  $b_n$  rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

Nechť  $b(x)$  je odpovídající vytvořující funkce. Pravá strana uvedené rekurence je vlastně koeficientem u  $x^{n-1}$  v součinu  $b(x) \cdot b(x)$ , tj. členem u  $x^n$  v  $xb(x)^2$ . Je tedy  $xb(x)^2$  vytvořující po tutéž posloupnost jako  $b(x)$  s výjimkou prvního členu.

# Pěstované binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet  $b_n$  pěstovaných binárních stromů na  $n$  vrcholech. Prozkoumáním případů pro malá  $n$  vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro  $n \geq 1$  vyhovuje  $b_n$  rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

Nechť  $b(x)$  je odpovídající vytvořující funkce. Pravá strana uvedené rekurence je vlastně koeficientem u  $x^{n-1}$  v součinu  $b(x) \cdot b(x)$ , tj. členem u  $x^n$  v  $xb(x)^2$ . Je tedy  $xb(x)^2$  vytvořující po tutéž posloupnost jako  $b(x)$  s výjimkou prvního členu. Tedy  $b(x) = 1 + xb(x)^2$ , z čehož dostaneme (pro  $x$  pevně zvolené)

$$b(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

# Pěstované binární stromy – pokr.

Ve vzorci

$$b(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

ale znaménko  $+$  nepřichází v úvahu, protože pro  $x \rightarrow 0_+$  má limitu  $\infty$ , zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu  $b_0 = 1$ .

## Pěstované binární stromy – pokr.

Ve vzorci

$$b(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

ale znaménko  $+$  nepřichází v úvahu, protože pro  $x \rightarrow 0_+$  má limitu  $\infty$ , zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu  $b_0 = 1$ .

Pomocí zobecněné binomické věty pak získáme rozvoj

$$(1 - 4x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k$$

a po vydělení  $1 - \sqrt{1 - 4x}$  výrazem  $2x$  (tj. posunem vlevo a vydělením 2) dostaneme

$$b_n = -\frac{1}{2}(-4)^{n+1} \binom{1/2}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

což jsou známá (a významná) **Catalanova čísla**.

# Catalanova čísla

Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky  $2n$  obsahujících  $n$  znaků  $X$  a  $Y$  takových, že žádný prefix slova neobsahuje více  $Y$  než  $X$



# Catalanova čísla

Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky  $2n$  obsahujících  $n$  znaků  $X$  a  $Y$  takových, že žádný prefix slova neobsahuje více  $Y$  než  $X$
- podobně fronty u pokladny (5koruny a 10koruny) tak, aby nezásobená pokladna mohla vždy vrátit (zároveň dostaneme pravděpodobnost, že náhodná fronta „projde“)

# Catalanova čísla

Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky  $2n$  obsahujících  $n$  znaků  $X$  a  $Y$  takových, že žádný prefix slova neobsahuje více  $Y$  než  $X$
- podobně fronty u pokladny (5koruny a 10koruny) tak, aby nezásobená pokladna mohla vždy vrátit (zároveň dostaneme pravděpodobnost, že náhodná fronta „projde“)
- počet korektně ozávkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek

# Catalanova čísla

Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky  $2n$  obsahujících  $n$  znaků  $X$  a  $Y$  takových, že žádný prefix slova neobsahuje více  $Y$  než  $X$
- podobně fronty u pokladny (5koruny a 10koruny) tak, aby nezásobená pokladna mohla vždy vrátit (zároveň dostaneme pravděpodobnost, že náhodná fronta „projde“)
- počet korektně ozávkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet *monotónních* cest z  $[0, 0]$  do  $[n, n]$  podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu

# Catalanova čísla

Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky  $2n$  obsahujících  $n$  znaků  $X$  a  $Y$  takových, že žádný prefix slova neobsahuje více  $Y$  než  $X$
- podobně fronty u pokladny (5koruny a 10koruny) tak, aby nezásobená pokladna mohla vždy vrátit (zároveň dostaneme pravděpodobnost, že náhodná fronta „projde“)
- počet korektně ozávkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet *monotónních* cest z  $[0, 0]$  do  $[n, n]$  podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet různých triangulací konvexního  $(n + 2)$ -úhelníku.