

# Matematika III – 13. přednáška

## Aplikace vytvořujících funkcí

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

11. 12. 2007

# Obsah přednášky

- 1 Vytvořující funkce
- 2 Řešení rekurencí

## Doporučené zdroje

- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž <http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.
- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, e-text.
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, **Kapitoly z diskrétní matematiky**, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.

# Opakování

## Definice

(Obyčejnou) **vytvvořující funkcí** posloupnosti  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

**Exponenciální vytvořující funkcí** posloupnosti  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  pak rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

### Poznámka

Používají se i další typy vytvořujících funkcí (např. v teorii čísel se používají Dirichletovy vytvořující funkce, kde roli faktoru  $x^n$  hraje  $n^{-x}$ ), ale těmi se zde zabývat nebudeme.

### Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [logický predikát] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, 0 v případě jeho nesplnění.

**Např.**  $[n = 1]$ ,  $[2|n]$  apod.

Pro vyjádření koeficientu u  $x^n$  ve vytvořující funkci  $F(x)$  se pak často používá zápis  $[x^n]F(x)$ .

## Operace s vytvořujícími funkcemi

- Sčítání dvou posloupností člen po členu.
- Vynásobení všech členů posloupnosti stejným skalárem.
- Posunutí posloupnosti doprava.
- Posunutí posloupnosti doleva.
- Vynásobení  $n$ -tého členu posloupnosti skalárem  $\alpha^n$ .
- „Nafouknutí“ posloupnosti nulami.
- Vynásobení  $n$ -tého členu posloupnosti číslem  $n$ .
- Vydělení  $n$ -tého členu posloupnosti číslem  $n$ .
- Konvoluce posloupností  $c_n = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k b_{n-k}$ .

## Základní přehled

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n, \quad (1, 1, 1, \dots)$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}, \quad (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$$

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}, \quad (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \dots)$$

$$\sin x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (0, 1, 0, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{120}, \dots)$$

$$\cos x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (1, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{24}, 0, \dots)$$

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k, \quad (1, r, \binom{r}{2}, \binom{r}{3}, \dots)$$

## Základní přehled – odvozené vztahy

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n, \quad (1, -1, 1, -1, \dots)$$

$$\frac{1}{1-x^m} = \sum_{n \geq 0} [m|n] x^n, \quad (1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n, \quad (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} x^n, \quad (1, c, \binom{c+1}{2}, \binom{c+2}{3}, \dots)$$

$$\frac{1}{1-rx} = \sum_{n \geq 0} r^n x^n, \quad (1, r, r^2, r^2, r^3, \dots)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} x^n \quad (0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots)$$



Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu  $a_n$  jako funkce  $n$ . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence. Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost  $a_n$  na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$  (předpokládajíce  $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$ ).
- 2 Obě strany rovnice vynásobíme  $x^n$  a sečteme přes všechna  $n \in \mathbb{N}_0$ . Na jedné straně tak dostaneme  $\sum_n a_n x^n$ , což je vytvořující funkce  $A(x)$ . Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující  $A(x)$ .
- 3 Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k  $A(x)$ .
- 4 Výsledné  $A(x)$  se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u  $x^n$  udává  $a_n$ , tj.  $a_n = [x^n]A(x)$ .

## Rozklad na parciální zlomky

Jak jsme již viděli na příkladu Fibonacciho posloupnosti, v kroku 4 často s výhodou využijeme **rozkladu na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve (často se používá při integraci racionálních lomených funkcí), proto připomeneme jen stručně:

- Předpokládáme, že  $P(x)/Q(x)$  je podíl polynomů, kde  $\text{st } P < \text{st } Q$  (jinak vydělíme se zbytkem) a  $P(x)$ ,  $Q(x)$  nemají společné kořeny.
- Polynom  $Q(x)$  rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_\ell}{x - \alpha_\ell}.$$

- Má-li kořen  $\alpha$  násobnost  $k$ , pak jsou příslušné parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k}.$$

## Rozklad na parciální zlomky – pokr.

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčítanec  $A/(x - \alpha)$  sčítancem  $(Ax + B)/(x^2 + px + q)$  včetně příslušných mocnin jmenovatele. (V našich úlohách ale raději rozložíme i kvadratické faktory na lineární výpočtem kořenů v  $\mathbb{C}$ .)
- Neznámé dopočítáme buď roznásobením a porovnáním koeficientům u jednotlivých mocnin  $x$  nebo dosazením jednotlivých kořenů.
- Výrazy  $A/(x - \alpha)^k$  převedeme na výrazy tvaru  $B/(1 - \beta x)^k$  vydělením čitatele i jmenovatele výrazem  $(-\alpha)^k$ . Tento výraz již umíme rozvinout do mocninné řady.

## Pěstované binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet  $b_n$  pěstovaných binárních stromů na  $n$  vrcholech. Prozkoumáním případů pro malá  $n$  vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro  $n \geq 1$  vyhovuje  $b_n$  rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

Vidíme, že jde vlastně o konvoluci posloupností. Vztah upravíme, aby platil pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$b_n = \sum_{0 \leq k < n} b_k b_{n-k-1} + [n = 0].$$

Tím máme hotov krok 1.

V kroku 2 vynásobíme obě strany  $x^n$  a sečteme. Je-li  $B(x)$  odpovídající vytvořující funkce, pak:

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_n b_n x^n = \sum_{n,k} b_k b_{n-k-1} x^n + \sum_{n,k} [n=0] x^n = \\ &= \sum_k b_k x^k \left( \sum_n b_{n-k-1} x^{n-k} \right) + 1 = \\ &= \sum_k b_k x^k (xB(x)) + 1 = B(x) \cdot xB(x) + 1. \end{aligned}$$

Pozorný čtenář si jistě povšiml, že ve výše uvedeném výpočtu jsme nahradili konvoluci  $b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \dots + b_{n-1} b_0$  vztahem  $b_n = b_0 b_{n-1} + \dots + b_{n-1} b_0 + b_n b_{-1} + b_{n+1} b_{-2} + \dots$ . Díky naší konvenci to ale není problém a velmi to usnadňuje práci se sumami (s nekonečnými součty se zde pracuje podstatně snadněji než s konečnými, kdy musíme neustále hlídat meze).

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici  $B(x) = xB(x)^2 + 1$  pro  $B(x)$  :

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Znaménko  $+$  ale nepřichází v úvahu, protože pak by pro  $x \rightarrow 0_+$   $B(x)$  měla limitu  $\infty$ , zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu  $b_0 = 1$ .

Zbývá už pouze krok 4, tedy rozvinout  $B(x)$  do mocninné řady. Rozvoj získáme pomocí zobecněné binomické věty

$$(1 - 4x)^{1/2} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^k$$

a po vydělení  $1 - \sqrt{1 - 4x}$  výrazem  $2x$  dostaneme

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^{k-1} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{-1/2}{n} \frac{(-4x)^n}{n+1} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}. \end{aligned}$$

# Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na  $n$  vrcholech je roven  $b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky  $2n$  obsahujících  $n$  znaků  $X$  a  $Y$  takových, že žádný prefix slova neobsahuje více  $Y$  než  $X$
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet *monotónních* cest z  $[0, 0]$  do  $[n, n]$  podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet různých triangulací konvexního  $(n + 2)$ -úhelníku.

# Ještě jeden příklad

## Příklad

Vyřešte rekurenci

$$a_0 = a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$$

## Řešení

Tato rekurence je opět jiného typu než dosud studované. Jako vždy neuškodí vypsání prvních několika členů posloupnosti (teď ale ani moc nepomůže, snad jen pro kontrolu správnosti výsledku).<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Narozdíl od tvrzení v *Concrete mathematics* je již možné tuto posloupnost nalézt v *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.



## Řešení (pokr.)

- Krok 1:  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$ .
- Krok 2:  $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$ .
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1 - 2x)(1 + x)^2}.$$

- Krok 4:  $a_n = \frac{7}{9}2^n + \left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\right)(-1)^n$ .

# Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

## Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník  $3 \times n$ ?

## Řešení

Snadno zjistíme, že  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 3$ ,  $c_3 = 0$ , dále klademe  $c_0 = 1$  (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).

Najdeme rekurzivní vztah – diskusí chování „na kraji“ zjistíme, že  $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2}$ ,  $r_n = c_{n-2} + r_{n-2}$ ,  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = 1$ , kde  $r_n$  je počet pokrytí obdélníku  $3 \times n$ , ze kterého jsme odstranili levý horní roh.

## Řešení (pokr.)

- Krok 1:  $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0]$ ,  $r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$ .

- Krok 2:

$$C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x).$$

- Krok 3:

$$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \quad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$

- Krok 4: Vidíme, že obě funkce jsou funkcemi  $z^2$ , ušetříme si práci tím, že uvážíme funkci  $D(x) = 1/(1 - 4x + x^2)$ , pak totiž  $C(x) = (1 - x^2)D(x^2)$ , tj.

$$[x^{2n}]C(x) = [x^{2n}](1 - x^2)D(x^2) = [x^n](1 - x)D(x), \text{ a tedy}$$
$$c_{2n} = d_n - d_{n-1}.$$

## Řešení (závěr)

Kořeny  $1 - 4x + x^2$  jsou  $2 + \sqrt{3}$  a  $2 - \sqrt{3}$  a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n}{3 - \sqrt{3}} + \frac{(2 - \sqrt{3})^n}{3 + \sqrt{3}}.$$

Podobně jako u Fibonacciho posloupnosti je druhý sčítanec pro velká  $n$  zanedbatelný a pro všechna  $n$  leží mezi 0 a 1, proto

$$c_{2n} = \left\lceil \frac{(2 + \sqrt{3})^n}{3 - \sqrt{3}} \right\rceil.$$

Např.  $c_{20} = 413403$ .