Matematika III – 13. přednáška
Aplikace vytvořujících funkcí

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

11. 12. 2007

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž `http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html`)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.

Doporučené zdroje

- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž `http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html`)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.
- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, *e*-text.

Doporučené zdroje

- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž `http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html`)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.
- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, *e*-text.
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, **Kapitoly z diskrétní matematiky**, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.

Plán přednášky

Opakování

Definice

(Obyčejnou) **vytvořující funkcí** posloupnosti $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

Exponenciální vytvořující funkcí posloupnosti $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ pak rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Poznámka

Používají se i další typy vytvořujících funkcí (např. v teorii čísel se používají Dirichletovy vytvořující funkce, kde roli faktoru x^n hraje n^{-x}), ale těmi se zde zabývat nebudeme.

Poznámka

Používají se i další typy vytvořujících funkcí (např. v teorii čísel se používají Dirichletovy vytvořující funkce, kde roli faktoru x^n hraje n^{-x}), ale těmi se zde zabývat nebudeme.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, 0 v případě jeho nesplnění.

Např. $[n = 1], [2|n]$ apod.

Poznámka

Používají se i další typy vytvořujících funkcí (např. v teorii čísel se používají Dirichletovy vytvořující funkce, kde roli faktoru x^n hraje n^{-x}), ale těmi se zde zabývat nebudeme.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, 0 v případě jeho nesplnění.
Např. $[n = 1], [2|n]$ apod.
Pro vyjádření koeficientu u x^n ve vytvořující funkci $F(x)$ se pak často používá zápis $[x^n]F(x)$.

Operace s vytvořujícími funkcemi

- Sčítání dvou posloupností člen po členu.
- Vynásobení všech členů posloupnosti stejným skalárem.
- Posunutí posloupnosti doprava.
- Posunutí posloupnosti doleva.
- Vynásobení n-tého členu posloupnosti skalárem α^n.
- „Nafouknutí“ posloupnosti nulami.
- Vynásobení n-tého členu posloupnosti číslem n.
- Vydělení n-tého členu posloupnosti číslem n.
- Konvoluce posloupností $c_n = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k b_{n-k}$.

Základní přehled

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \qquad (1,1,1,\ldots)$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}, \qquad (0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\ldots)$$

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \qquad (1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24}\ldots)$$

$$\sin x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad (0,1,0,-\frac{1}{6},0,\frac{1}{120},\ldots)$$

$$\cos x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad (1,0,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{24}),0,\ldots)$$

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k, \qquad (1,r,\binom{r}{2},\binom{r}{3},\ldots)$$

Základní přehled – odvozené vztahy

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n, \qquad (1,-1,1,-1,\dots)$$

$$\frac{1}{1-x^m} = \sum_{n\geq 0}[m|n]x^n, \qquad (1,0,\dots,0,1,0,\dots,0,1,\dots)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n, \qquad (1,2,3,4,5,\dots)$$

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}x^n, \qquad \left(1,c,\binom{c+1}{2},\binom{c+2}{3},\dots\right)$$

$$\frac{1}{1-rx} = \sum_{n\geq 0} r^n x^n, \qquad (1,r,r^2,r^2,r^3,\dots)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}x^n \qquad \left(0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\dots\right)$$

Plán přednášky

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.
4. Výsledné $A(x)$ se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u x^n udává a_n, tj. $a_n = [x^n]A(x)$.

Rozklad na parciální zlomky

Jak jsme již viděli na příkladu Fibonacciho posloupnosti, v kroku 4 často s výhodou využijeme **rozkladu na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve (často se používá při integraci racionálních lomených funkcí), proto připomeneme jen stručně:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\text{st}\, P < \text{st}\, Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.

Rozklad na parciální zlomky

Jak jsme již viděli na příkladu Fibonacciho posloupnosti, v kroku 4 často s výhodou využijeme **rozkladu na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve (často se používá při integraci racionálních lomených funkcí), proto připomeneme jen stručně:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde st $P <$ st Q (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.

Rozklad na parciální zlomky

Jak jsme již viděli na příkladu Fibonacciho posloupnosti, v kroku 4 často s výhodou využijeme **rozkladu na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve (často se používá při integraci racionálních lomených funkcí), proto připomeneme jen stručně:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde st $P <$ st Q (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \cdots + \frac{A_\ell}{x - \alpha_\ell}.$$

Rozklad na parciální zlomky

Jak jsme již viděli na příkladu Fibonacciho posloupnosti, v kroku 4 často s výhodou využijeme **rozkladu na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve (často se používá při integraci racionálních lomených funkcí), proto připomeneme jen stručně:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde st $P <$ st Q (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \cdots + \frac{A_\ell}{x - \alpha_\ell}.$$

- Má-li kořen α násobnost k, pak jsou příslušné parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k}.$$

Rozklad na parciální zlomky – pokr.

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele. (V našich úlohách ale raději rozložíme i kvadratické faktory na lineární výpočtem kořenů v $\mathbb{C}$.)

Rozklad na parciální zlomky – pokr.

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele. (V našich úlohách ale raději rozložíme i kvadratické faktory na lineární výpočtem kořenů v $\mathbb{C}$.)
- Neznámé dopočítáme buď roznásobením a porovnáním koeficientům u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.

Rozklad na parciální zlomky – pokr.

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele. (V našich úlohách ale raději rozložíme i kvadratické faktory na lineární výpočtem kořenů v $\mathbb{C}$.)
- Neznámé dopočítáme buď roznásobením a porovnáním koeficientům u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.
- Výrazy $A/(x-\alpha)^k$ převedeme na výrazy tvaru $B/(1-\beta x)^k$ vydělením čitatele i jmenovatele výrazem $(-\alpha)^k$. Tento výraz již umíme rozvinout do mocninné řady.

Pěstované binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n pěstovaných binárních stromů na n vrcholech.

Pěstované binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n pěstovaných binárních stromů na n vrcholech. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Pěstované binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n pěstovaných binárních stromů na n vrcholech. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro $n \geq 1$ vyhovuje b_n rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

Pěstované binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n pěstovaných binárních stromů na n vrcholech. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro $n \geq 1$ vyhovuje b_n rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

Vidíme, že jde vlastně o konvoluci posloupností. Vztah upravíme, aby platil pro všechna $n \in N_0$:

$$b_n = \sum_{0 \leq k < n} b_k b_{n-k-1} + [n = 0].$$

Tím máme hotov krok 1.

V kroku 2 vynásobíme obě strany x^n a sečteme. Je-li $B(x)$ odpovídající vytvořující funkce, pak:

$$B(x) = \sum_n b_n x^n = \sum_{n,k} b_k b_{n-k-1} x^n + \sum_{n,k} [n = 0] x^n =$$

$$= \sum_k b_k x^k \left(\sum_n b_{n-k-1} x^{n-k} \right) + 1 =$$

$$= \sum_k b_k x^k (xB(x)) + 1 = B(x) \cdot xB(x) + 1.$$

V kroku 2 vynásobíme obě strany x^n a sečteme. Je-li $B(x)$ odpovídající vytvořující funkce, pak:

$$B(x) = \sum_n b_n x^n = \sum_{n,k} b_k b_{n-k-1} x^n + \sum_{n,k} [n=0] x^n =$$

$$= \sum_k b_k x^k \left(\sum_n b_{n-k-1} x^{n-k} \right) + 1 =$$

$$= \sum_k b_k x^k (xB(x)) + 1 = B(x) \cdot xB(x) + 1.$$

Pozorný čtenář si jistě povšiml, že ve výše uvedeném výpočtu jsme nahradili konvoluci $b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0$ vztahem $b_n = b_0 b_{n-1} + \cdots + b_{n-1} b_0 + b_n b_{-1} + b_{n+1} b_{-2} + \cdots$. Díky naší konvenci to ale není problém a velmi to usnadňuje práci se sumami (s nekonečnými součty se zde pracuje podstatně snadněji než s konečnými, kdy musíme neustále hlídat meze).

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici $B(x) = xB(x)^2 + 1$ pro $B(x)$:

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Znaménko $+$ ale nepřichází v úvahu, protože pak by pro $x \to 0_+$ $B(x)$ měla limitu ∞, zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu $b_0 = 1$.

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici $B(x) = xB(x)^2 + 1$ pro $B(x)$:

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Znaménko + ale nepřichází v úvahu, protože pak by pro $x \to 0_+$ $B(x)$ měla limitu ∞, zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu $b_0 = 1$.

Zbývá už pouze krok 4, tedy rozvinout $B(x)$ do mocninné řady. Rozvoj získáme pomocí zobecněné binomické věty

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^k$$

a po vydělení $1 - \sqrt{1-4x}$ výrazem $2x$ dostaneme

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^{k-1} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{-1/2}{n} \frac{(-4x)^n}{n+1} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}. \end{aligned}$$

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*.

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet *monotónních* cest z $[0, 0]$ do $[n, n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet *monotónních* cest z $[0, 0]$ do $[n, n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet různých triangulací konvexního $(n + 2)$-úhelníku.

Ještě jeden příklad

Příklad

Vyřešte rekurenci

$$a_0 = a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$$

Ještě jeden příklad

Příklad

Vyřešte rekurenci

$$a_0 = a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$$

Řešení

Tato rekurence je opět jiného typu než dosud studované. Jako vždy neuškodí vypsání prvních několika členů posloupnosti (teď ale ani moc nepomůže, snad jen pro kontrolu správnosti výsledku).[a]

[a] Narozdíl od tvrzení v *Concrete mathematics* je již možné tuto posloupnost nalézt v *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.*

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1 - 2x)(1 + x)^2}.$$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1 - 2x)(1 + x)^2}.$$

- Krok 4: $a_n = \frac{7}{9}2^n + \left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\right)(-1)^n$.

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, $c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).
Najdeme rekurzívní vztah – diskusí chování „na kraji“ zjistíme, že $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2}$, $r_n = c_{n-2} + r_{n-2}$, $r_0 = 0, r_1 = 1$, kde r_n je počet pokrytí obdélníku $3 \times n$, ze kterého jsme odstranili levý horní roh.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = u_{n-1} + r_{n-2}.$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = u_{n-1} + r_{n-2}.$
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x).$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = u_{n-1} + r_{n-2}.$
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x).$
- Krok 3:

$$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \qquad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$.
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x)$.
- Krok 3:
$$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \qquad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$
- Krok 4: Vidíme, že obě funkce jsou funkcemi z^2, ušetříme si práci tím, že uvážíme funkci $D(x) = 1/(1 - 4x + x^2)$, pak totiž $C(x) = (1 - x^2)D(x^2)$, tj.
  $[x^{2n}]C(x) = [x^{2n}](1 - x^2)D(x^2) = [x^n](1 - x)D(x)$, a tedy
  $c_{2n} = d_n - d_{n-1}$.

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}.$$

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}.$$

Podobně jako u Fibonacciho posloupnosti je druhý sčítanec pro velká n zanedbatelný a pro všechna n leží mezi 0 a 1, proto

$$c_{2n} = \left\lceil \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} \right\rceil.$$

Např. $c_{20} = 413403$.