

# Matematika III – 14. přednáška

## Aplikace vytvořujících funkcí – další úlohy

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

18. 12. 2007

# Obsah přednášky

- 1 Řešení rekurencí
- 2 Exponenciální vytvořující funkce

## Doporučené zdroje

- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž <http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.

## Doporučené zdroje

- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž <http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.
- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, e-text.

## Doporučené zdroje

- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž <http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.
- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, e-text.
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, **Kapitoly z diskrétní matematiky**, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.

# Plán přednášky

- 1 Řešení rekurencí
- 2 Exponenciální vytvořující funkce

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu  $a_n$  jako funkce  $n$ . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence. Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost  $a_n$  na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$  (předpokládajíce  $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$ ).

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu  $a_n$  jako funkce  $n$ . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost  $a_n$  na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$  (předpokládajíce  $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$ ).
- 2 Obě strany rovnice vynásobíme  $x^n$  a sečteme přes všechna  $n \in \mathbb{N}_0$ . Na jedné straně tak dostaneme  $\sum_n a_n x^n$ , což je vytvořující funkce  $A(x)$ . Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující  $A(x)$ .



Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu  $a_n$  jako funkce  $n$ . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence. Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost  $a_n$  na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$  (předpokládajíce  $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$ ).
- 2 Obě strany rovnice vynásobíme  $x^n$  a sečteme přes všechna  $n \in \mathbb{N}_0$ . Na jedné straně tak dostaneme  $\sum_n a_n x^n$ , což je vytvořující funkce  $A(x)$ . Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující  $A(x)$ .
- 3 Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k  $A(x)$ .

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu  $a_n$  jako funkce  $n$ . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence. Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost  $a_n$  na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$  (předpokládajíce  $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$ ).
- 2 Obě strany rovnice vynásobíme  $x^n$  a sečteme přes všechna  $n \in \mathbb{N}_0$ . Na jedné straně tak dostaneme  $\sum_n a_n x^n$ , což je vytvořující funkce  $A(x)$ . Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující  $A(x)$ .
- 3 Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k  $A(x)$ .
- 4 Výsledné  $A(x)$  se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u  $x^n$  udává  $a_n$ , tj.  $a_n = [x^n]A(x)$ .

# Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

# Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

## Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník  $3 \times n$ ?

# Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

## Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník  $3 \times n$ ?

## Řešení

Snadno zjistíme, že  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 3$ ,  $c_3 = 0$ , dále klademe  $c_0 = 1$  (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).

# Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

## Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník  $3 \times n$ ?

## Řešení

Snadno zjistíme, že  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 3$ ,  $c_3 = 0$ , dále klademe  $c_0 = 1$  (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).

Najdeme rekurzivní vztah – diskusí chování „na kraji“ zjistíme, že  $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2}$ ,  $r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$ ,  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = 1$ , kde  $r_n$  je počet pokrytí obdélníku  $3 \times n$ , ze kterého jsme odstranili levý horní roh.

## Řešení (pokr.)

Hodnoty  $c_n$  a  $r_n$  pro několik malých  $n$  jsou:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$c_n$	1	0	3	0	11	0	41	0
$r_n$	0	1	0	4	0	15	0	56

## Řešení (pokr.)

- Krok 1:  $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0]$ ,  $r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$ .



## Řešení (pokr.)

- Krok 1:  $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0]$ ,  $r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$ .

- Krok 2:

$$C(x) = 2xC(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x).$$

## Řešení (pokr.)

- Krok 1:  $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0]$ ,  $r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$ .

- Krok 2:

$$C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x).$$

- Krok 3:

$$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \quad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$

## Řešení (pokr.)

- Krok 1:  $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0]$ ,  $r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$ .

- Krok 2:

$$C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x).$$

- Krok 3:

$$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \quad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$

- Krok 4: Vidíme, že obě funkce jsou funkcemi  $x^2$ , ušetříme si práci tím, že uvážíme funkci  $D(z) = 1/(1 - 4z + z^2)$ , pak totiž  $C(x) = (1 - x^2)D(x^2)$ , tj.

$$[x^{2n}]C(x) = [x^{2n}](1 - x^2)D(x^2) = [x^n](1 - x)D(x), \text{ a tedy}$$

$$c_{2n} = d_n - d_{n-1}.$$

## Řešení (závěr)

Kořeny  $1 - 4x + x^2$  jsou  $2 + \sqrt{3}$  a  $2 - \sqrt{3}$  a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n}{3 - \sqrt{3}} + \frac{(2 - \sqrt{3})^n}{3 + \sqrt{3}}.$$

## Řešení (závěr)

Kořeny  $1 - 4x + x^2$  jsou  $2 + \sqrt{3}$  a  $2 - \sqrt{3}$  a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n}{3 - \sqrt{3}} + \frac{(2 - \sqrt{3})^n}{3 + \sqrt{3}}.$$

Podobně jako u Fibonacciho posloupnosti je druhý sčítanec pro velká  $n$  zanedbatelný a pro všechna  $n$  leží mezi 0 a 1, proto

$$c_{2n} = \left\lceil \frac{(2 + \sqrt{3})^n}{3 - \sqrt{3}} \right\rceil.$$

Např.  $c_{20} = 413403$ .

# Plán přednášky

- 1 Řešení rekurencí
- 2 Exponenciální vytvořující funkce

# Exponenciální vytvořující funkce

Někdy mívá vytvořující funkce posloupnosti  $(a_n)$  komplikované vlastnosti, přičemž posloupnost  $(a_n/n!)$  má vytvořující funkci daleko jednodušší. V takových případech raději pracujeme s tzv. **exponenciálními vytvořujícími funkcemi**

$$\widehat{A}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Jméno vychází z toho, že vytvořující funkcí *základní* posloupnosti  $(1, 1, 1, 1, \dots)$  je  $e^x$ .

# Exponenciální vytvořující funkce

Někdy mívá vytvořující funkce posloupnosti  $(a_n)$  komplikované vlastnosti, přičemž posloupnost  $(a_n/n!)$  má vytvořující funkci daleko jednodušší. V takových případech raději pracujeme s tzv. **exponenciálními vytvořujícími funkcemi**

$$\widehat{A}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Jméno vychází z toho, že vytvořující funkcí *základní* posloupnosti  $(1, 1, 1, 1, \dots)$  je  $e^x$ .

Zdůrazněme, že exponenciální vytvořující funkce se od obyčejných liší i standardními operacemi.



- Vynásobením  $x$  získáme funkci posloupnosti  $(na_{n-1})$ .

- Vynásobením  $x$  získáme funkci posloupnosti  $(na_{n-1})$ .
- Derivací získáme funkci odpovídající posunutí doleva.

- Vynásobením  $x$  získáme funkci posloupnosti  $(na_{n-1})$ .
- Derivací získáme funkci odpovídající posunutí doleva.
- Integrací získáme funkci odpovídající posunutí doprava.

- Vynásobením  $x$  získáme funkci posloupnosti  $(na_{n-1})$ .
- Derivací získáme funkci odpovídající posunutí doleva.
- Integrací získáme funkci odpovídající posunutí doprava.
- Součinem dvou funkcí  $\widehat{F}(x)$  a  $\widehat{G}(x)$  získáme funkci  $\widehat{H}(x)$ , která odpovídá posloupnosti  $h_n = \sum_k \binom{n}{k} f_k g_{n-k}$ , tzv. *binomické konvoluci*  $f_n$  a  $g_n$ .

## Příklad

Řešte rekurenci danou vztahy  $g_0 = 0, g_1 = 1$  a předpisem

$$g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k}.$$

## Řešení

Vzhledem k rekurentnímu vztahu, který obsahuje binomickou konvoluci posloupností, se zdá vhodné využít *exponenciálních vytvořujících funkcí*. Označme  $\widehat{G}(x)$  příslušnou exponenciální mocninnou řadu. Budeme postupovat v obvyklých čtyřech krocích.

## Příklad

Řešte rekurenci danou vztahy  $g_0 = 0, g_1 = 1$  a předpisem

$$g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k}.$$

## Řešení

Vzhledem k rekurentnímu vztahu, který obsahuje binomickou konvoluci posloupností, se zdá vhodné využít *exponenciálních vytvořujících funkcí*. Označme  $\widehat{G}(x)$  příslušnou exponenciální mocninnou řadu. Budeme postupovat v obvyklých čtyřech krocích.

- Krok 1:  $g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k} + [n = 1]$ .

## Příklad

Řešte rekurenci danou vztahy  $g_0 = 0, g_1 = 1$  a předpisem

$$g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k}.$$

## Řešení

Vzhledem k rekurentnímu vztahu, který obsahuje binomickou konvoluci posloupností, se zdá vhodné využít *exponenciálních vytvořujících funkcí*. Označme  $\widehat{G}(x)$  příslušnou exponenciální mocninnou řadu. Budeme postupovat v obvyklých čtyřech krocích.

- Krok 1:  $g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k} + [n = 1]$ .
- Krok 2:  $\widehat{G}(x) = -2x\widehat{G}(x) + \widehat{G}(x)^2 + x$ .

## Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme  $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$ . Dosazením  $x = 0$  vidíme, že odpovídá znaménko  $-$ , proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$



## Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme  $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$ . Dosazením  $x = 0$  vidíme, že odpovídá znaménko  $-$ , proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme  $\widehat{G}(x)$  do mocninné řady. S využitím vztahů

## Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme  $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$ . Dosazením  $x = 0$  vidíme, že odpovídá znaménko  $-$ , proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme  $\widehat{G}(x)$  do mocninné řady. S využitím vztahů

## Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme  $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$ . Dosazením  $x = 0$  vidíme, že odpovídá znaménko  $-$ , proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme  $\widehat{G}(x)$  do mocninné řady. S využitím vztahů

$$\binom{-1/2}{k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \binom{2k}{k}$$

a

## Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme  $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$ . Dosazením  $x = 0$  vidíme, že odpovídá znaménko  $-$ , proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme  $\widehat{G}(x)$  do mocninné řady. S využitím vztahů

$$\binom{-1/2}{k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \binom{2k}{k}$$

a

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1}{2k} \cdot \binom{-1/2}{k-1}$$

postupně dostaneme

## Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme  $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$ . Dosazením  $x = 0$  vidíme, že odpovídá znaménko  $-$ , proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme  $\widehat{G}(x)$  do mocninné řady. S využitím vztahů

$$\binom{-1/2}{k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \binom{2k}{k}$$

a

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1}{2k} \cdot \binom{-1/2}{k-1}$$

postupně dostaneme

## Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1 + 4x^2} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

## Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

Odtud, protože

$$\sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} = \hat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2},$$

máme  $g_{2k+1} = 0$

## Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

Odtud, protože

$$\sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} = \widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2},$$

máme  $g_{2k+1} = 0$  a

$$g_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} \cdot (2k)! =$$



## Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

Odtud, protože

$$\sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} = \widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2},$$

máme  $g_{2k+1} = 0$  a

$$g_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} \cdot (2k)! = (-1)^k \cdot (2k)! \cdot C_{k-1},$$

kde  $C_n$  je  $n$ -té Catalanovo číslo.

# Cayleyho formule

Připomeňme, že jsme již dříve dokázali, že počet stromů na  $n$  vrcholech je  $\kappa(K_n) = n^{n-2}$ . Dokážeme tento výsledek ještě jednou pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.

Označme pro jednoduhost  $t_n = \kappa(K_n)$ . Již dříve jsme viděli, že  $t_1 = t_2 = 1$ ,  $t_3 = 3$ . Lze rovněž snadno spočítat  $t_4 = 16$ .

# Cayleyho formule

Připomeňme, že jsme již dříve dokázali, že počet stromů na  $n$  vrcholech je  $\kappa(K_n) = n^{n-2}$ . Dokážeme tento výsledek ještě jednou pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.

Označme pro jednoduhost  $t_n = \kappa(K_n)$ . Již dříve jsme viděli, že  $t_1 = t_2 = 1$ ,  $t_3 = 3$ . Lze rovněž snadno spočítat  $t_4 = 16$ .

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol  $v$  a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster  $K_n$  tak, že odstraníme vrchol  $v$  a hrany s ním incidentní.

# Cayleyho formule

Připomeňme, že jsme již dříve dokázali, že počet stromů na  $n$  vrcholech je  $\kappa(K_n) = n^{n-2}$ . Dokážeme tento výsledek ještě jednou pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.

Označme pro jednoduchost  $t_n = \kappa(K_n)$ . Již dříve jsme viděli, že  $t_1 = t_2 = 1$ ,  $t_3 = 3$ . Lze rovněž snadno spočítat  $t_4 = 16$ .

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol  $v$  a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster  $K_n$  tak, že odstraníme vrchol  $v$  a hrany s ním incidentní.

Pak pro  $n > 1$

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_m} k_1 \cdots k_m \cdot t_{k_1} \cdots t_{k_m}$$

# Cayleyho formule

Připomeňme, že jsme již dříve dokázali, že počet stromů na  $n$  vrcholech je  $\kappa(K_n) = n^{n-2}$ . Dokážeme tento výsledek ještě jednou pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.

Označme pro jednoduchost  $t_n = \kappa(K_n)$ . Již dříve jsme viděli, že  $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 3$ . Lze rovněž snadno spočítat  $t_4 = 16$ .

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol  $v$  a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster  $K_n$  tak, že odstraníme vrchol  $v$  a hrany s ním incidentní.

Pak pro  $n > 1$

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_m} k_1 \cdots k_m \cdot t_{k_1} \cdots t_{k_m}$$

Např. pro  $n = 4$  máme  $t_4 = 3t_3 + 6t_1t_2 + t_1^3$ .

Ošklivě vypadající rekurenci zjednodušíme substitucí  $u_n = nt_n$ .  
Dostáváme pro  $n > 1$

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \dots \frac{u_{k_m}}{k_m!}$$

a je vidět, že vnitřní sumu dostaneme jako koeficient u  $x^{n-1}$  v  $m$ -té mocnině řady  $\hat{U}(x) = \sum u_n \frac{x^n}{n!}$ .

Ošklivě vypadající rekurenci zjednodušíme substitucí  $u_n = nt_n$ .  
Dostáváme pro  $n > 1$

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \dots \frac{u_{k_m}}{k_m!}$$

a je vidět, že vnitřní sumu dostaneme jako koeficient u  $x^{n-1}$  v  $m$ -té mocnině řady  $\hat{U}(x) = \sum u_n \frac{x^n}{n!}$ . Proto je

$$\frac{u_n}{n!} = [x^{n-1}] \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \hat{U}(x)^m,$$

a tedy

$$\hat{U}(x) = e^{x\hat{U}(x)}.$$

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvzení, které uvedeme bez důkazu.

### Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou  $\mathcal{E}_t(x)$  nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk + 1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$



Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvzení, které uvedeme bez důkazu.

### Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou  $\mathcal{E}_t(x)$  nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk + 1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že  $\mathcal{E}_0 = e^x$ , dále označujeme  $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$ .

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvzení, které uvedeme bez důkazu.

### Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou  $\mathcal{E}_t(x)$  nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk + 1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že  $\mathcal{E}_0 = e^x$ , dále označujeme  $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$ .

**Fakt:**  $\ln \mathcal{E}_t(x) = x \cdot \mathcal{E}_t(x)$ , tj. spec.  $\mathcal{E}(x) = e^{x\mathcal{E}(x)}$ .

Srovnáním tohoto vztahu s výše uvedeným  $\widehat{U}(x) = e^{x\widehat{U}(x)}$  vidíme, že  $\widehat{U}(x) = x\mathcal{E}(x)$ .

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvzení, které uvedeme bez důkazu.

### Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou  $\mathcal{E}_t(x)$  nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk + 1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že  $\mathcal{E}_0 = e^x$ , dále označujeme  $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$ .

**Fakt:**  $\ln \mathcal{E}_t(x) = x \cdot \mathcal{E}_t(x)$ , tj. spec.  $\mathcal{E}(x) = e^{x\mathcal{E}(x)}$ .

Srovnáním tohoto vztahu s výše uvedeným  $\widehat{U}(x) = e^{x\widehat{U}(x)}$  vidíme, že  $\widehat{U}(x) = x\mathcal{E}(x)$ .

Proto

$$t_n = \frac{u_n}{n} = \frac{n!}{n} [x^n] \widehat{U}(x) = (n-1)! [x^{n-1}] \mathcal{E}(x) = n^{n-2}.$$