Matematika III – 2. přednáška
Funkce více proměnných: parciální derivace, směrové derivace, diferenciál

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

25. 9. 2007

Obsah přednášky

Plán přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

Plán přednášky

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstatní.

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstatní.

Definice

Existuje-li limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) - f(x_1^*, \ldots, x_n^*)\right),$$

říkáme, že funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_1^*, \ldots, x_n^*]$ parciální derivaci podle proměnné x_i a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$).

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstatní.

Definice

Existuje-li limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*) \right),$$

říkáme, že funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_1^*, \dots, x_n^*]$ parciální derivaci podle proměnné x_i a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$).

Podobně jako v případě jedné proměnné, pokud má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ parciální derivace ve všech bodech nějaké otevřené množiny, jsou tyto derivace rovněž funkcemi z E_n do $\mathbb{R}$.

Pro funkce v E_2 dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)) = \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \\
\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)) = \\
&= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.
\end{aligned}$$

Pro funkce v E_2 dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)) = \\ = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)) = \\ = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Poznámka

Parciální derivace funkce $f : E_2 \to \mathbb{R}$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$ udává směrnici tečny v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ ke křivce, která je průsečíkem grafu G_f s rovinou $y = y_0$.

Parciální derivace vs. spojitost

Rozdíl oproti funkcím jedné proměnné!

Protože parciální derivace popisují chování funkce v okolí daného bodu jen velmi omezeně (pouze ve směru souřadných os), může se v jiných směrech chovat velmi divoce.

Poznámka

Z existence všech parciálních derivací v daném bodě **neplyne** spojitost v tomto bodě.

Parciální derivace vs. spojitost

Rozdíl oproti funkcím jedné proměnné!

Protože parciální derivace popisují chování funkce v okolí daného bodu jen velmi omezeně (pouze ve směru souřadných os), může se v jiných směrech chovat velmi divoce.

Poznámka

Z existence všech parciálních derivací v daném bodě **neplyne** spojitost v tomto bodě.

Příklad

Funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{pro } x=0 \textit{ nebo } y=0 \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $[0,0]$ obě parciální derivace nulové, přitom v tomto bodě neexistuje limita, a tedy není ani spojitá.

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)).$$

Směrovou derivaci v bodě x často značíme rovněž $f_v(x)$.

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)).$$

Směrovou derivaci v bodě x často značíme rovněž $f_v(x)$.

Speciální volbou jednotkových vektorů ve směru souřadných os dostáváme právě *parciální derivace funkce* f.

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\phi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné $k \in \mathbb{R}$,*

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\phi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\phi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) + f(x) d_v g(x)$,

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\phi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) + f(x) d_v g(x)$,
4. *pro* $g(x) \neq 0$ *je* $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(d_v f(x)\, g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\phi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) + f(x) d_v g(x)$,
4. *pro* $g(x) \neq 0$ *je* $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(d_v f(x)\, g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\phi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) + f(x) d_v g(x)$,
4. *pro* $g(x) \neq 0$ *je* $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(d_v f(x)\, g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Poznámka

Neplatí ale aditivita vzhledem ke směrům:
$d_{u+v} f(x) \neq d_u f(x) + d_v f(x)$.
Rovněž je vidět z výše uvedené věty, že směrová derivace nezávisí jen na „směru“ vektoru, ale i na jeho velikosti.

Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x,y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$$

mimo počátek a $f(0,0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci „po různých parabolách“ dostáváme různé limity).

Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$$

mimo počátek a $f(0,0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci „po různých parabolách“ dostáváme různé limity).

Již v případě limit jsme viděli, že nestačí zkoumat chování funkce ve směru souřadných os (parciální derivace), ani po přímkách (směrové derivace), proto by nás uvedené chování nemělo překvapit.

Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x^8 + y^4}$$

mimo počátek a $f(0,0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci „po různých parabolách“ dostáváme různé limity).

Již v případě limit jsme viděli, že nestačí zkoumat chování funkce ve směru souřadných os (parciální derivace), ani po přímkách (směrové derivace), proto by nás uvedené chování nemělo překvapit.

Ke spojitosti potřebujeme silnější pojem, tzv. *totální diferenciál*,

Diferenciál funkce jedné proměnné

V minulém semestru jste si říkali, že diferenciál dy funkce jedné proměnné v bodě x_0 je přírůstek na tečně ke grafu funkce $y = f(x)$ v tomto bodě a jeho existence je ekvivalentní existenci derivace tamtéž.

Diferenciál funkce jedné proměnné

V minulém semestru jste si říkali, že diferenciál dy funkce jedné proměnné v bodě x_0 je přírůstek na tečně ke grafu funkce $y = f(x)$ v tomto bodě a jeho existence je ekvivalentní existenci derivace tamtéž.
Ukázali jste si, že diferenciál závislé proměnné dy je **lineární funkcí** diferenciálu nezávislé proměnné dx, splňující

$$dy = f'(x_0) \cdot dx.$$

Diferenciál funkce jedné proměnné

V minulém semestru jste si říkali, že diferenciál dy funkce jedné proměnné v bodě x_0 je přírůstek na tečně ke grafu funkce $y = f(x)$ v tomto bodě a jeho existence je ekvivalentní existenci derivace tamtéž.
Ukázali jste si, že diferenciál závislé proměnné dy je **lineární funkcí** diferenciálu nezávislé proměnné dx, splňující

$$dy = f'(x_0) \cdot dx.$$

Formálně říkáme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v x_0, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0.$$

(Přitom z definice derivace snadno plyne, že pak $A = f'(x_0)$.)

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definice

Funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *diferencovatelná v bodě* x, jestliže existuje vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny „směry“ $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|} \big(f(x+v) - f(x) - a \cdot v \big) = 0.$$

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definice

Funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *diferencovatelná v bodě* x, jestliže existuje vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny „směry“ $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|} \big(f(x+v) - f(x) - a \cdot v\big) = 0.$$

Lineární funkci *df* definovanou předpisem $v \mapsto a \cdot v$ (závislou na vektorové proměnné v) nazýváme *diferenciál funkce* f.

V literatuře se často také říká *totální diferenciál* df funkce f.

Diferenciál vs. spojitost

Díky tomuto zesílení parciálních a směrových derivací již dostáváme **spojitost:**

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferencovatelná v bodě* $x \in \mathbb{R}^n$*, pak je v tomto bodě spojitá.*

Diferenciál vs. spojitost

Díky tomuto zesílení parciálních a směrových derivací již dostáváme **spojitost:**

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferencovatelná v bodě* $x \in \mathbb{R}^n$, *pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz: Z diferencovatelnosti f v bodě x plyne $f(x+v) - f(x) = a \cdot v + \tau(v)$, kde $\lim_{v \to 0} \frac{\tau(v)}{\|v\|} = 0$.

Diferenciál vs. spojitost

Díky tomuto zesílení parciálních a směrových derivací již dostáváme **spojitost:**

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $x \in \mathbb{R}^n$, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz: Z diferencovatelnosti f v bodě x plyne
$f(x+v) - f(x) = a \cdot v + \tau(v)$, kde $\lim_{v \to 0} \frac{\tau(v)}{\|v\|} = 0$.
Proto:

$$\lim_{v \to 0} \big(f(x+v) - f(x) \big) = \lim_{v \to 0} \big(a \cdot v + \tau(v) \big) = 0,$$

a tedy

$$\lim_{v \to 0} f(x+v) = f(x).$$

$\square$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x, pak má v tomto bodě všechny směrové (a tedy i parciální) derivace. Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ je přitom $d_v f(x) = \mathrm{d}f(x)(v)$, tj. v označení z definice diferenciálu

$$d_v f(x) = a \cdot v.$$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x, pak má v tomto bodě všechny směrové (a tedy i parciální) derivace. Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ je přitom $d_v f(x) = \mathrm{d}f(x)(v)$, tj. v označení z definice diferenciálu

$$d_v f(x) = a \cdot v.$$

Důkaz:

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(x+tv) - f(x)\big) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(\mathrm{d}f(x)(tv) + \tau(tv)\big) =$$

$$= \mathrm{d}f(x)(v) + \|v\| \lim_{t \to 0} \frac{\tau(tv)}{\|tv\|} = \mathrm{d}f(x)(v) = a \cdot v.$$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x, pak má v tomto bodě všechny směrové (a tedy i parciální) derivace. Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ je přitom $d_v f(x) = \mathrm{d}f(x)(v)$, tj. v označení z definice diferenciálu

$$d_v f(x) = a \cdot v.$$

Důkaz:

$$d_v f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x+tv) - f(x)\big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\mathrm{d}f(x)(tv) + \tau(tv)\big) =$$

$$= \mathrm{d}f(x)(v) + \|v\| \lim_{t\to 0} \frac{\tau(tv)}{\|tv\|} = \mathrm{d}f(x)(v) = a \cdot v.$$

Poznámka

Z předchozího je ihned vidět, že vektor parciálních derivací $f'(x)$ je přímo roven vektoru a.

Uvažujme $f : E_2 \to \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.
Diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je lineární funkce $\mathrm{d}f : E_2 \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.

Uvažujme $f : E_2 \to \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi. Diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je lineární funkce $\mathrm{d}f : E_2 \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi. Obecněji v případě funkcí více proměnných píšeme obdobně

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \qquad (*)$$

a platí:

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojité parciální derivace. Pak existuje její diferenciál $\mathrm{d}f$ v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí $(*)$.

Přibližné výpočty

Podobně jako v případě diferenciálu funkcí jedné proměnné lze i diferenciál funkce více proměnných využít k (velmi) přibližným výpočtům.

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočteme $e^{0{,}05^3-0{,}02}$.

Přibližné výpočty

Podobně jako v případě diferenciálu funkcí jedné proměnné lze i diferenciál funkce více proměnných využít k (velmi) přibližným výpočtům.

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočteme $e^{0{,}05^3-0{,}02}$.

Řešení

Využijeme diferenciál funkce $f(x,y)=e^{x^3+y}$ v bodě $x=[0,0]$ s diferencemi $v=(0,05;-0,02)$. Máme

$$df(x,y)=e^{x^3+y}\cdot 3x^2\,dx+e^{x^3+y}\,dy,$$

a tedy $df(0,0)=0\,dx+1\,dy$, což celkem dává odhad $e^{0{,}05^3-0{,}02}=f(0,05;-0,02)\approx f(0,0)+df(0,05;-0,02)=1-0,02=0,98$

Tečná nadrovina ke grafu funkce

Pro $f : E_2 \to \mathbb{R}$ a pevný bod $[x_0, y_0] \in E_2$ uvažme rovinu v E_3:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

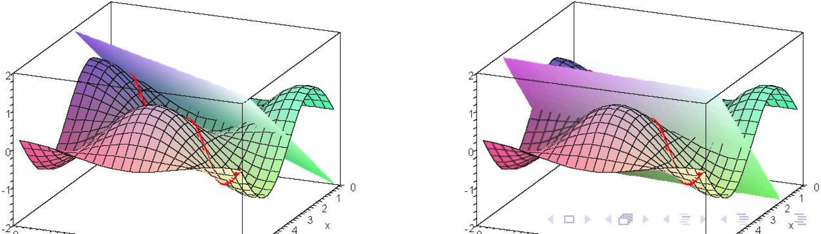
Je to jediná rovina procházející (x_0, y_0), ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí *tečná rovina* ke grafu funkce f.

Tečná nadrovina ke grafu funkce

Pro $f : E_2 \to \mathbb{R}$ a pevný bod $[x_0, y_0] \in E_2$ uvažme rovinu v E_3:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je to jediná rovina procházející (x_0, y_0), ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí *tečná rovina* ke grafu funkce f.
Na obrázku jsou zobrazeny dvě tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$. Červená čára je obrazem křivky $c(t) = (t, t, f(t, t))$.



Obecně pro $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1}.

Obecně pro $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1}. Tato nadrovina

1. prochází bodem $(x, f(x))$
2. její zaměření je grafem lineárního zobrazení $\mathrm{d}f(x) : E_n \to \mathbb{R}$, tj. diferenciálu v bodě $x \in E_n$.

Obecně pro $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1}. Tato nadrovina

1. prochází bodem $(x, f(x))$
2. její zaměření je grafem lineárního zobrazení $\mathrm{d}f(x) : E_n \to \mathbb{R}$, tj. diferenciálu v bodě $x \in E_n$.

Analogie s funkcemi jedné proměnné:
Diferencovatelná funkce f má na E_n v bodě $x \in E_n$ nulový diferenciál tehdy a jen tehdy, když její složení s libovolnou křivkou procházející tímto bodem zde má stacionární bod.
To ovšem neznamená, že v takovém bodě musí mít f aspoň lokálně buď maximum nebo minimum. Stejně jako u funkcí jedné proměnné můžeme rozhodovat teprve podle derivací vyšších.

Plán přednášky

1. Literatura
2. Parciální a směrové derivace
   - Parciální derivace
   - Směrové derivace
   - Totální diferenciál
   - Tečná nadrovina ke grafu funkce
3. Derivace vyšších řádů, Taylorova věta
   - Parciální derivace vyšších řádů
   - Hessián – aproximace 2. řádu
   - Taylorova věta

Pro pevný přírůstek $v \in \mathbb{R}^n$ je vyčíslení diferenciálů na tomto přírůstku opět operace na funkcích $f : E_n \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto d_v f = \mathrm{d}f(v).$$

Výsledkem je $\mathrm{d}f(v) : E_n \to \mathbb{R}$. Jestliže je tato funkce opět diferencovatelná, můžeme tento proces opakovat.

Pro pevný přírůstek $v \in \mathbb{R}^n$ je vyčíslení diferenciálů na tomto přírůstku opět operace na funkcích $f : E_n \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto d_v f = \mathrm{d}f(v).$$

Výsledkem je $\mathrm{d}f(v) : E_n \to \mathbb{R}$. Jestliže je tato funkce opět diferencovatelná, můžeme tento proces opakovat.
Pro **parciální derivace druhého řádu** píšeme

$$(\frac{\partial}{\partial x_j} \circ \frac{\partial}{\partial x_i})f = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

v případě opakované volby $i = j$ píšeme také

$$(\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \frac{\partial}{\partial x_i})f = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Úplně stejně postupujeme při dalších iteracích a hovoříme o **parciálních derivacích k-tého řádu**

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}.$$

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je k-krát diferencovatelná funkce se spojitými parciálními derivacemi až do řádu k včetně v okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$. Pak všechny parciální derivace nezávisí na pořadí derivování.

Úplně stejně postupujeme při dalších iteracích a hovoříme o **parciálních derivacích k-tého řádu**

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}.$$

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je k-krát diferencovatelná funkce se spojitými parciálními derivacemi až do řádu k včetně v okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$. Pak všechny parciální derivace nezávisí na pořadí derivování.

Speciálně tedy pro $n = 2$ platí (při alternativním způsobu zápisu parciálních derivací):

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Definice

Je-li $f : E_n \to \mathbb{R}$ libovolná dvakrát diferencovatelná funkce v bodě x, nazýváme symetrickou matici

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Hessovou maticí (příp. Hessiánem) funkce f v bodě x. Často bývá Hessián značen $f''(x)$.

Definice

Je-li $f : E_n \to \mathbb{R}$ libovolná dvakrát diferencovatelná funkce v bodě x, nazýváme symetrickou matici

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Hessovou maticí (příp. Hessiánem) funkce f v bodě x. Často bývá Hessián značen $f''(x)$.

Poznámka

Analogicky jako v případě parciálních derivací lze definovat i směrové derivace vyšších řádů v bodě $x \in E_n$. Pak platí (za předpokladu spojitosti jedné ze stran v x)
$f_{uv}(x) = f_{vu}(x) = u^T Hf(x) v = (Hf(x)u) \cdot v$.

Pro křivku $c(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + \xi t, y_0 + \eta t)$ mají funkce

$$
\begin{aligned}
\alpha(t) &= f(x(t), y(t)) \\
\beta(t) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0, y_0)\xi^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\xi\eta + f_{yy}(x_0, y_0)\eta^2 \right)
\end{aligned}
$$

v bodě (x_0, y_0) stejné derivace do druhého řádu včetně.

Pro křivku $c(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + \xi t, y_0 + \eta t)$ mají funkce

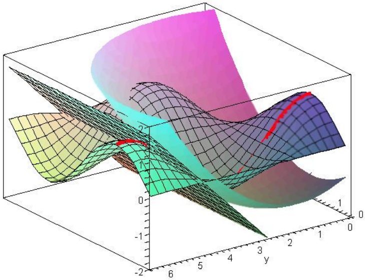
$$
\begin{aligned}
\alpha(t) &= f(x(t), y(t)) \\
\beta(t) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(x_0, y_0)\xi^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\xi\eta + f_{yy}(x_0, y_0)\eta^2 \Big)
\end{aligned}
$$

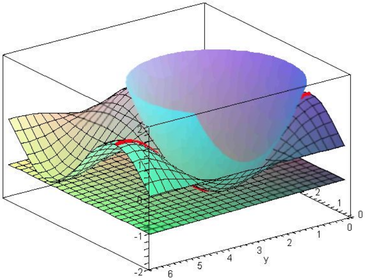
v bodě (x_0, y_0) stejné derivace do druhého řádu včetně.
Funkci β lze psát vektorově takto:

$$
\beta(t) = f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\xi, \eta) \cdot Hf(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}
$$

nebo $\beta(t) = f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(v) + \frac{1}{2} Hf(x_0, y_0)(v, v)$, kde $v = (\xi, \eta) = c'(t)$ je přírůstek zadaný derivací křivky $c(t)$ a Hessián symetrická 2–forma.

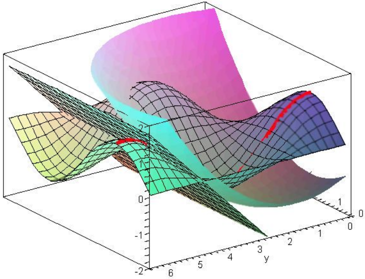
Použití Hessiánu připomíná Taylorovu větu funkcí jedné proměnné!

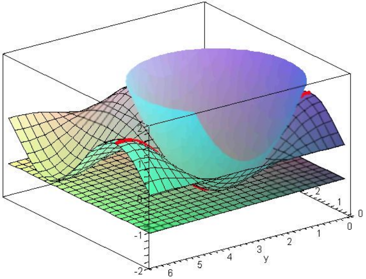




Tečná rovina je vynesena spolu s kvadratickým přiblížením pro funkci $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$.

Použití Hessiánu připomíná Taylorovu větu funkcí jedné proměnné!





Tečná rovina je vynesena spolu s kvadratickým přiblížením pro funkci $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$.
Obecně pro funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$, body $x = [x_1, \dots, x_n] \in E_n$ a přírůstky $v = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ klademe

$$d^k f(x)(v) = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_k \le n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_1, \dots, x_n) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.$$

Taylorova věta

Taylorova věta pro funkci jedné proměnné aproximovala danou funkci v okolí bodu x_0 *Taylorovým polynomem*, přičemž zároveň udávala chybu, jíž se při tomto odhadu dopouštíme.

Taylorova věta

Taylorova věta pro funkci jedné proměnné aproximovala danou funkci v okolí bodu x_0 *Taylorovým polynomem*, přičemž zároveň udávala chybu, jíž se při tomto odhadu dopouštíme.
U funkcí více proměnných je situace podobná, pouze formálně složitější.

Definice

Taylorovým polynomem funkce f stupně m (se středem) v bodě x^* nazýváme polynom (více proměnných), který má s funkcí f stejnou funkční hodnotu v daném bodě x^* a stejnou hodnotu všech parciálních derivací až do řádu m včetně.

Věta (Taylorova)

Nechť má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě x^* a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $m+1$. Pak pro $v \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$f(x) = f(x^* + v) = T_m(x) + R_m(x),$$

Věta (Taylorova)

Nechť má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě x^* a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $m+1$. Pak pro $v \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$f(x) = f(x^* + v) = T_m(x) + R_m(x),$$

kde

$$T_m(x) = f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(v) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(x^*)(v) + \cdots + \frac{1}{m!}\,\mathrm{d}^m f(x^*)(v),$$

resp.

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}\,\mathrm{d}^{m+1} f(x^* + \theta v)(v), \quad \theta \in (0,1),$$

je Taylorův polynom, resp. zbytek v Taylorově vzorci a $v = x - x^*$ je vektor diferencí.

Věta (Taylorova)

Nechť má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě x^* a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $m+1$. Pak pro $v \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$f(x) = f(x^* + v) = T_m(x) + R_m(x),$$

kde

$$T_m(x) = f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(v) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(x^*)(v) + \cdots + \frac{1}{m!}\,\mathrm{d}^m f(x^*)(v),$$

resp.

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}\,\mathrm{d}^{m+1} f(x^* + \theta v)(v), \quad \theta \in (0,1),$$

je Taylorův polynom, resp. zbytek v Taylorově vzorci a $v = x - x^*$ je vektor diferencí.

Důkaz: poměrně snadný s využitím Taylorovy věty pro funkci $F(t) = f(x^* + t \cdot v)$ jedné proměnné t.

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:

Tečná rovina: $f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:

Tečná rovina: $f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$

Výraz třetího řádu

$$\mathrm{d}^3 f(x, y)(\xi, \eta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\xi^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\xi^2\eta + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\xi\eta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\eta^3$$

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:

Tečná rovina: $f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$

Výraz třetího řádu

$$\mathrm{d}^3 f(x,y)(\xi,\eta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\xi^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\xi^2\eta + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\xi\eta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\eta^3$$

a obecně

$$\mathrm{d}^k f(x,y)(\xi,\eta) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-\ell} \partial y^{\ell}} \xi^{k-\ell}\eta^{\ell}.$$

Poznámka

Uvedené výrazy Vám jistě (možná, snad?) připomínají *binomickou větu*. Tak si je lze rovněž „neformálně“ zapamatovat:

$$d^k f(x,y)(\xi,\eta) = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\xi + \frac{\partial}{\partial y}\eta\Big)^k,$$

přičemž j-té mocniny nahrazujeme j-tými parciálními derivacemi.

Aproximace

Taylorova věta nám (stejně jako v jednorozměrném případě) dává lepší možnosti aproximace funkcí v okolí bodu než pouhý diferenciál.

Přenost výpočtu samozřejmě přímo ovlivní i volba funkce, jejíž hodnoty budeme aproximovat.

Aproximace

Taylorova věta nám (stejně jako v jednorozměrném případě) dává lepší možnosti aproximace funkcí v okolí bodu než pouhý diferenciál.
Přenost výpočtu samozřejmě přímo ovlivní i volba funkce, jejíž hodnoty budeme aproximovat.

Příklad

Pomocí Taylorovy věty přibližně vypočteme $e^{0,05^3-0,02}$.

Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^3+y}$ v bodě $[0,0]$ s diferencemi $v = (\xi, \eta) = (0,05; -0,02)$.

Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x,y) = e^{x^3+y}$ v bodě $[0,0]$ s diferencemi $v = (\xi, \eta) = (0,05; -0,02)$.

Parciální derivace jsou:

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^3+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^3+y} \cdot (3x^2 \cdot 3x^2 + 6x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x^3+y}$.

Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^3+y}$ v bodě $[0,0]$ s diferencemi $v = (\xi, \eta) = (0,05; -0,02)$.

Parciální derivace jsou:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{x^3+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot (3x^2 \cdot 3x^2 + 6x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{x^3+y}$.

Pak

$$T_2(0+\xi, 0+\eta) =$$

$$= f(0,0) + \mathrm{d}f(0,0) \cdot (\xi, \eta) + (\xi, \eta) \cdot \mathrm{d}^2 f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + \eta + \eta^2.$$

Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x, y) = e^{x^3+y}$ v bodě $[0, 0]$ s diferencemi $v = (\xi, \eta) = (0,05; -0,02)$.

Parciální derivace jsou:

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^3+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^3+y} \cdot (3x^2 \cdot 3x^2 + 6x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x^3+y}$.

Pak

$$
\begin{aligned}
T_2(0 + \xi, 0 + \eta) &= \\
&= f(0, 0) + \mathrm{d}f(0, 0) \cdot (\xi, \eta) + (\xi, \eta) \cdot \mathrm{d}^2 f(0, 0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \\
&= 1 + \eta + \eta^2.
\end{aligned}
$$

Odtud dostáváme odhad

$$e^{0,05^3 - 0,02} \approx 1 - 0,02 + 0,02^2 = 0,9804.$$