

Matematika III – 3. přednáška  
Funkce více proměnných: lokální a absolutní  
extrémy, zobrazení mezi euklidovskými prostory

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

2. 9. 2007

## Obsah přednášky

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm>).
- *Předmětové záložky v IS MU*

## Definice

Vnitřní bod  $x^* \in E_n$  definičního oboru funkce  $f$  je (lokálním) **maximem** (resp. **minimem**), jestliže existuje jeho okolí  $U$  takové, že pro všechny body  $x \in U$  platí  $f(x) \leq f(x^*)$  (resp.  $f(x) \geq f(x^*)$ ). Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny  $x \neq x^*$ , hovoříme o **ostrém lokálním extrému**.

Vnitřní bod  $x^* \in E_n$  definičního oboru funkce  $f$ , ve kterém je diferenciál  $df(x)$  nulový nazýváme **stacionární bod funkce  $f$** .

Nutnou podmínkou pro existenci maxima nebo minima v bodě  $x^*$  (v případě diferencovatelnosti funkce  $f$  v  $x^*$ ) je **vymizení diferenciálu v tomto bodě, tj.  $df(x^*) = 0$** . Skutečně, pokud je  $df(x^*) \neq 0$ , pak existuje směr  $v$ , ve kterém je  $d_v f(x^*) \neq 0$ . Pak ovšem nutně je podél přímky  $x^* + tv$  na jednu stranu od bodu  $x^*$  hodnota funkce roste a na druhou klesá.

### Příklad

Funkce  $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 1 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

má v počátku ostré lokální maximum (přitom zde není spojitá, a tedy ani diferencovatelná).

### Příklad

Funkce  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  je v počátku spojitá a má zde ostré lokální minimum, přestože v tomto bodě není diferencovatelná (grafem funkce je kuželová plocha – viz první přednáška).

## Stacionární body

Pro to, aby nabývala v daném bodě diferencovatelná funkce svého lokálního extrému (maxima nebo minima), je nutnou podmínkou, aby byl daný bod *stacionární*.

Přitom ale (podobně jako u funkcí jedné proměnné) stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému.

Např. funkce  $f(x, y) = (x - x_0)(y - y_0)$  má v bodě  $[x_0, y_0]$  stacionární bod ( $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (y - y_0)dx + (x - x_0)dy$ ), nemá zde však zřejmě lokální extrém (jde o tzv. „sedlo“).

Poznat, jakého typu je daný stacionární bod, nám stejně jako v případě funkcí jedné proměnné umožní (díky Taylorově větě) derivace vyšších řádů.

## Situace v jedné proměnné

Mějme funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a její stacionární bod  $x_0$  (tj.  $f'(x_0) = 0$ ).  
Je-li  $f''(x_0) < 0$ , má funkce v  $x_0$  ostré lokální maximum  
(analogicky neostré, resp. minimum).

Toto tvrzení vyplynulo z Taylorovy věty (stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 = \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2, \end{aligned}$$

kde  $\xi$  leží mezi  $x$  a  $x_0$ . Ze spojitosti  $f''$  a vlastnosti  $f''(x_0) < 0$  pak pro  $\xi$  dostatečně blízko  $x_0$  dostáváme  $f''(\xi) < 0$  a tedy  $R_1(x) < 0$  dostatečně blízko  $x_0$ . Proto zde  $f(x) < f(x_0)$  a  $x_0$  je lokálním maximem.

## Situace ve více proměnných

Mějme funkci  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  a její stacionární bod  $x^*$  (tj.  $f'(x^*) = \mathbf{0}$  – nulový vektor parciálních derivací).

Z Taylorovy věty pak dostáváme (opět stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x^*) + df(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2} d^2f(\xi)(x - x^*) = \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2} d^2f(\xi)(x - x^*), \end{aligned}$$

kde  $\xi = x^* + \theta v$  (pro  $\theta \in (0, 1)$ ) leží „mezi“  $x$  a  $x^*$ .

Zbývá do více proměnných „přeložit“ podmínku, která říká, že výraz

$$d^2f(\xi)(x - x^*) = (x - x^*)^T Hf(\xi)(x - x^*)$$

je nekladný (resp. nezáporný) pro libovolné  $x$ .



# Pozitivně (negativně) definitní kvadratické formy

## Definice

Kvadratická forma  $h : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  je

- **pozitivně definitní**, je-li  $h(u) > 0$  pro všechny  $u \neq 0$
- **pozitivně semidefinitní**, je-li  $h(u) \geq 0$  pro všechny  $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li  $h(u) < 0$  pro všechny  $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li  $h(u) \leq 0$  pro všechny  $u \in V$
- **indefinitní**, je-li  $h(u) > 0$  a  $h(v) < 0$  pro vhodné  $u, v \in V$ .

Často rovněž hovoříme o definitnosti matice  $A$  kvadratické formy  $h$  (jsou spolu ve vztahu  $h(u) = u^T A u = A u \cdot u$ ).

S těmito pojmy jste se setkali již v části věnované lineárním modelům a měli byste tedy umět rozeznat definitnost kvadratické formy (resp. její matice v dané bázi).

## Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice  $A$  je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice  $A$  (tj. kořeny  $\lambda$  jejího charakteristického polynomu  $|A - \lambda I_n|$ ) jsou kladné,
- všechny hlavní minory  $A$  jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Daná symetrická matice  $A$  je *negativně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice  $A$  jsou záporné,
- hlavní minory  $A$  střídají znaménko, počínaje záporným.

## Věta

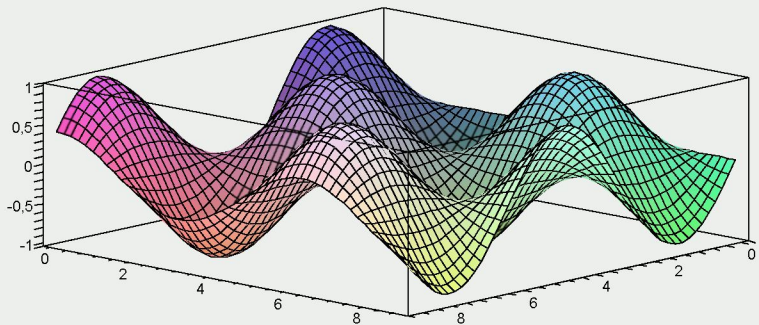
Nechť  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce a  $x^* \in E_n$  nechť je stacionární bod funkce  $f$ . Potom

- 1 je-li  $Hf(x^*)$  pozitivně (negativně) definitní, má  $f$  v  $x^*$  ostré lokální minimum (maximum),
- 2 je-li  $Hf(x^*)$  indefinitní, nemá  $f$  v bodě  $x^*$  lokální extrém.
- 3 má-li  $f$  v  $x^*$  lokální minimum (maximum), je  $Hf(x^*)$  pozitivně (negativně) semidefinitní,

Všimněme si, že věta nedává žádný výsledek, pokud je hessián funkce ve zkoumaném bodě degenerovaný (nulový). Důvod je opět stejný jako u funkcí jedné proměnné. V takových případech totiž existují směry, ve kterých první i druhá derivace zmizí a my proto v tomto řádu přiblížení neumíme poznat, zda se funkce bude chovat jako  $t^3$  nebo jako  $\pm t^4$  dokud nespočteme alespoň v potřebných směrech derivace vyšší.

## Příklad

Uvažme funkci  $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$ , která připomíná známá kartonová plata na vajíčka a spočtěme její lokální extrémy.



## Příklad (pokr.)

Spočtěme si nejprve první parciální derivace:

$$f_x(x, y) = \cos(x) \cos(y), \quad f_y(x, y) = -\sin(x) \sin(y),$$

takže obě derivace budou nulové pro dvě sady bodů

- 1  $\cos(x) = 0, \sin(y) = 0$ , to je  $[x, y] = [\frac{2k+1}{2}\pi, \ell\pi]$ , pro libovolné  $k, \ell \in \mathbb{Z}$
- 2  $\cos(y) = 0, \sin(x) = 0$ , to je  $[x, y] = [k\pi, \frac{2\ell+1}{2}\pi]$ , pro libovolné  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ .

Druhé parciální derivace jsou

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \cos(y) & -\cos(x) \sin(y) \\ -\cos(x) \sin(y) & -\sin(x) \cos(y) \end{pmatrix}$$

## Příklad (pokr.)

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

- 1  $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , přičemž znaménko  $+$  nastává, když  $k$  a  $\ell$  jsou *různé* parity a naopak pro  $-$ ,
- 2  $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , přičemž znaménko  $+$  nastává, když  $k$  a  $\ell$  jsou *různé* parity a naopak pro  $-$ .

Protože naše funkce má spojitý hessián, který je nedegenerovaný, nastane lokální maximum tehdy a jen tehdy, když náš bod  $(x^*, y^*)$  patří do první skupiny se stejnými paritami  $k$  a  $\ell$ . Když budou parity opačné, pak bod z první skupiny bude naopak bodem lokálního minima. Naopak, hessián u druhé skupiny bodů se vyčíslí kladně na některých přírůstcích a záporně na jiných. Stejně se proto bude chovat i celá funkce  $f$  v okolí.

## Příklad (Poznámky)

- matice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  je indefinitní, přestože má oba hlavní minory nekladné (pro semidefinitnost je znaménko minorů pouze nutnou podmínkou!)
- nalezené lokální extrémy šlo jistě najít snadněji úvahou o nabývání hodnot  $\pm 1$  funkcí  $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$ , neměli bychom ale jistotu, že jde o **všechny** extrémy.

# Absolutní extrémy

## Definice

Nechť  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  a  $M$  je podmnožinou definičního oboru  $f$ .  
V bodě  $x^*$  nabývá  $f$  absolutního (globálního) maxima (minima) na  $M$ , pokud je  $f(x^*) \geq f(x)$  ( $f(x^*) \leq f(x)$ ) pro všechna  $x \in M$ .

Existence extrémů na kompaktní (uzavřené a ohraničené) množině vyplývá z Weierstrassovy věty.

## Věta

*Nechť  $M \subseteq E_n$  je kompaktní množina,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá. Pak  $f$  nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů uvnitř  $M$  nebo v některém hraničním bodě.*

Hledání absolutních extrémů funkce na množině tak máme převedeno na nalezení lokálních extrémů (což umíme) a vyšetření hraničních bodů. To je ale často komplikovanější záležitost, které se budeme více věnovat později v části o *vázaných extrémech*.



### Příklad

Nalezněte extrémů funkce  $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$  na množině  $M$ , která je dána trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou  $x + y - 4 = 0$ .

### Řešení

Jediným stacionárním bodem je  $[1, 1]$ , kde nastává absolutní maximum  $f(1, 1) = 1$ . Absolutní minimum  $-12$  nastává v hraničních bodech  $[4, 0]$  a  $[0, 4]$ .

Zobrazení  $F : E_n \rightarrow E_m$  je při zvolených kartézských souřadnicích na obou stranách obyčejná  $m$ -tice

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

funkcí  $f_i : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $F$  je *diferencovatelné* nebo *spojitě diferencovatelné zobrazení*, jestliže tuto vlastnost mají všechny funkce  $f_1, \dots, f_m$ .

Diferencovatelná zobrazení  $F : E_n \rightarrow E_n$ , která mají inverzní zobrazení  $G : E_n \rightarrow E_n$  definované na celém svém obrazu, se nazývají **(diferencovatelné) transformace**. Příkladem transformace v  $E_2$  je přechod mezi polárními a kartézskými souřadnicemi:

$$[r, \theta] \mapsto [r \cos \theta, r \sin \theta]$$

s inverzí

$$[x, y] \mapsto [\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arctg} \frac{y}{x}], [0, y] \mapsto [y, \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y].$$

Lineární zobrazení  $df_i(x) : E^n \rightarrow \mathbb{R}$  lineárně aproximují přírůstky  $f_i$ .

### Definice

$$D^1F(x) = \begin{pmatrix} df_1(x) \\ df_2(x) \\ \vdots \\ df_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x)$$

se nazývá **Jacobiho matice zobrazení**  $F$  v bodě  $x$ . Lineární zobrazení  $D^1F(x)$  definované na přírůstcích  $v = (v_1, \dots, v_n)$  pomocí stejně značené Jacobiho matice nazýváme **diferenciál zobrazení**  $F$  v bodě  $x$  z definičního oboru, jestliže

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} (F(x+v) - F(x) - D^1F(x)(v)) = \mathbf{0}.$$

Důsledek Věty o existenci diferenciálu pro funkce  $n$  proměnných je:

#### Věta

*Nechť  $F : E_n \rightarrow E_m$  je zobrazení, jehož všechny souřadné funkce mají spojitě parciální derivace v okolí bodu  $x \in E_n$ . Pak existuje diferenciál  $D^1 F(x)$  zobrazení  $F$  zadaný Jacobiho maticí.*

### Věta („Chain rule“)

*Necht'  $F : E_n \rightarrow E_m$  a  $G : E_m \rightarrow E_r$  jsou dvě diferencovatelná zobrazení, přičemž definiční obor  $G$  obsahuje celý obor hodnot  $F$ . Pak také složené zobrazení  $G \circ F$  je diferencovatelné a jeho diferenciál je v každém bodě z definičního obodu  $F$  kompozicí diferenciálů*

$$D^1(G \circ F)(x) = D^1G(F(x)) \circ D^1F(x).$$

*Příslušná Jacobiho matice je dána součinem příslušných Jacobiho matic.*

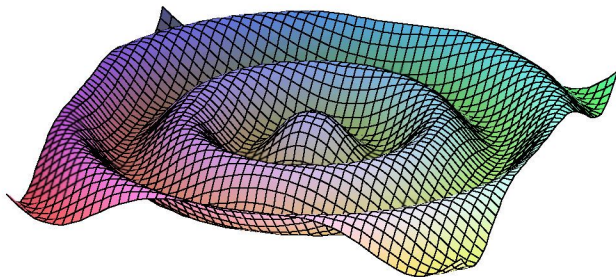
Polární souřadnice vzniknou z kartézských souřadnic transformací  $F : E_2 \rightarrow E_2$ , kterou v souřadnicích  $[x, y]$  a  $[r, \varphi]$  zapíšeme:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Funkci  $g_t : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  v polárních souřadnicích

$$g(r, \varphi, t) = \sin(r-t).$$

Funkce nám docela dobře přibližuje vlnění povrchu hladiny po bodovém vzruchu v počátku v čase  $t$ :



Chceme-li vypočítat derivaci funkce zadané parametricky v kartézských souřadnicích, využijeme větu o derivaci složeného zobrazení  $g \circ F : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} D^1(g \circ F)(x) &= D^1g(F(x)) \circ D^1F(x) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) \frac{\partial r}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, t) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2} - t) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 0$$

a podobně

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, t) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2} - t) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

## Věta o inverzním zobrazení

### Věta

*Nechť  $F : E_n \rightarrow E_n$  je spojitě diferencovatelné zobrazení na nějakém okolí bodu  $x^* \in E_n$  a necht' je Jacobiho matice  $D^1F(x^*)$  invertibilní. Pak na nějakém okolí bodu  $x^*$  existuje inverzní zobrazení  $F^{-1}$  a jeho diferenciál v bodě  $F(x^*)$  je inverzním zobrazením k  $D^1F(x^*)$ , tzn. je zadán inverzní maticí k Jacobiho matici zobrazení  $F$  v bodě  $x^*$ .*

Princip důkazu: Z pravidla pro derivování složené funkce vyplývá, že pokud diferencovatelná inverze existuje, pak musí být její Jacobiho matice inverzí k původní Jacobiho matici (srovnejte s případem 1 proměnné). Důkaz poměrně komplikovaným způsobem vyvozuje, že díky invertovatelnosti Jacobiho matice existuje diferencovatelná inverze.



## Věta o implicitní funkci

Pro jednoduchost vyložíme ideu v rovině  $E_2$ :

Pro spojitě diferencovatelnou funkci  $F(x, y) : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  hledejme body  $[x, y]$ , ve kterých platí  $F(x, y) = 0$ . Příkladem může být třeba obvyklá (implicitní) definice přímek a kružnic:

$$F(x, y) = ax + by + c = 0$$

$$F(x, y) = (x - s)^2 + (y - t)^2 - r^2 = 0, \quad r > 0.$$

V prvním případě je (při  $b \neq 0$ ) předpisem zadaná funkce

$$y = f(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

pro všechna  $x$ . Ve druhém případě umíme pouze pro  $[a, b]$  splňující rovnici kružnice a  $b \neq t$  najít okolí bodu  $a$ , na kterém nastane

$$y = f(x) = t + \sqrt{(x - s)^2 - r},$$
$$y = f(x) = t - \sqrt{(x - s)^2 - r}.$$

Body  $[s \pm r, t]$  také vyhovují rovnici kružnice, platí v nich ale  $F_y(s \pm r, t) = 0$ , což vystihuje polohu tečny ke kružnici v těchto bodech rovnoběžné s osou  $y$ . **V těchto bodech neumíme najít okolí, na němž by kružnice byla popsána jako funkce  $y = f(x)$ .**

Navíc umíme spočítat i **derivace**:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{2(x-s)}{\sqrt{(x-s)^2 - r^2}} = \frac{x-s}{y-t} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Naopak, pokud budeme chtít najít závislost  $x = f(y)$  takovou, aby  $F(f(y), y) = 0$ , pak v okolí bodů  $(s \pm r, t)$  bez problémů uspějeme. Všimněme si, že v těchto bodech je parciální derivace  $F_x$  nenulová.

Shrňme pozorování (pro pouhé dva příklady):

Pro funkci  $F(x, y)$  a bod  $[a, b] \in E_2$  takový, že  $F(a, b) = 0$ , umíme najít funkci  $y = f(x)$  splňující  $F(x, f(x)) = 0$ , pokud je  $F_y(a, b) \neq 0$ . V takovém případě umíme i vypočítat  $f'(x) = -F_x/F_y$ . Dokážeme, že takto to platí vždy, navíc rozšířené i na libovolné počty proměnných.

Poslední tvrzení o derivaci přitom je dobře zapamatovatelné (i pochopitelné) z výrazu pro diferenciál:

$$0 = dF = F_x dx + F_y dy = (F_x + F_y f'(x)) dx.$$

### Věta (O implicitní funkci)

Nechť  $F : E_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná funkce na otevřeném okolí bodu  $[x^*, y^*] \in E_n \times \mathbb{R}$ , ve kterém je  $F(x^*, y^*) = 0$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$ . Potom existuje spojitá funkce  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná na nějakém okolí  $U$  bodu  $x^* \in E_n$  taková, že  $F(x, f(x)) = 0$  pro všechny  $x \in U$ .

Navíc má funkce  $f$  v okolí bodu  $x^*$  parciální derivace splňující

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

### Příklad

Určete lokální extrémy funkce  $z = f(x, y)$ , která je určena implicitně rovnicí  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz = 1$ .

### Řešení

Derivováním rovnosti podle  $x$  a  $y$  dostáváme:

$$2x + 2z \cdot z_x - z - x \cdot z_x - \sqrt{2}yz_x = 0$$

$$2y + 2z \cdot z_y - x \cdot z_y - \sqrt{2}z - \sqrt{2}yz_y = 0,$$

odkud vyjádříme

$$z_x = \frac{z - 2x}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z_y = \frac{\sqrt{2}z - 2y}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

## Řešení (pokr.)

Stacionární body musí splňovat:  $z_x = 0$ ,  $z_y = 0$ , tj.  $z = 2x = \sqrt{2}y$ , a tedy  $y = \sqrt{2}x$ . Dosazením do původní rovnice dostáváme stacionární body  $[1, \sqrt{2}, 2]$  a  $[-1, -\sqrt{2}, -2]$ . V těchto bodech je  $F_z \neq 0$  (je to zároveň jmenovatel všech zde vystupujících zlomků), proto je v jejich okolí implicitně určena jistá funkce  $z = f(x, y)$ . Dalším derivováním implicitní rovnice vypočteme parciální derivace  $f$  2. řádu:

$$z_{xx} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

Ve stacionárních bodech je  $Hf$  negativně, resp. pozitivně definitní, proto zde nastávají lokální maximum, resp. minimum funkce  $f$ .

Nejobecnější případ, kdy definujeme implicitně zadané zobrazení, popisuje následující věta (v případě  $n=1$  kopíruje větu o implicitní funkci).

### Věta (O implicitním zobrazení)

*Nechť  $F : E_{m+n} \rightarrow E_n$  je spojitě diferencovatelné zobrazení na otevřeném okolí bodu  $[x^*, y^*] \in E_m \times E_n = E_{m+n}$ , v němž platí  $F(x^*, y^*) = \mathbf{0}$  a  $\det D_y^1 F \neq 0$ . Potom existuje spojitě diferencovatelné zobrazení  $G : E_m \rightarrow E_n$  definované na nějakém okolí  $U$  bodu  $x^* \in E_m$  s obrazem  $G(U)$ , který obsahuje bod  $y^*$ , a takové, že  $F(x, G(x)) = 0$  pro všechny  $x \in U$ .*

*Navíc je Jacobiho matice  $D^1 G$  zobrazení  $G$  na okolí bodu  $x^*$  zadána součinem matic*

$$D^1 G(x) = -(D_y^1 F)^{-1}(x, G(x)) \cdot D_x^1 F(x, G(x)).$$