Matematika III

A

4. ledna 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Potřebné minimum (včetně bonusu) je 15 bodů.
Na práci máte 90 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Jsou-li všechny vlastní hodnoty (čísla) matice A záporné, je A negativně definitní.

(b) **ano — ne** Rovinný graf o 5 vrcholech a 5 hranách má právě 2 stěny.

(c) **ano — ne** Existuje-li limita funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ v daném bodě, pak je jednoznačně určena.

(d) **ano — ne** Je-li A stacionárním bodem funkce f, pak je buď jejím lokálním maximem nebo minimem.

(e) **ano — ne** Každá cesta v grafu je zároveň tahem.

(f) **ano — ne** Existují alespoň 2 neizomorfní kubické (každý vrchol stupně 3) grafy o 6 vrcholech.

Příklady:

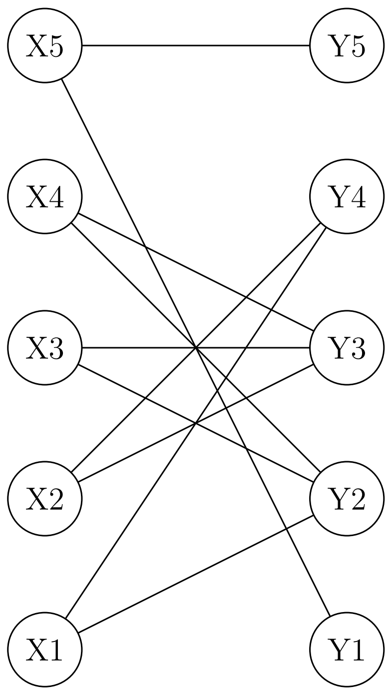
1. (6 bodů) S využitím integrálního počtu odvoďte vzorec pro obsah obecného lichoběžníku s vrcholy o souřadnicích $A = [0, 0]$, $B = [b, 0]$, $C = [c, v]$, $D = [d, v]$.
(Pozn: řešení přímo využívající znalost vzorce pro obsah lichoběžníku bude považováno za nesprávné!)

2. (6 bodů) Uveďte algoritmus na nalezení maximálního párování v bipartitním grafu (tj. na nalezení maximální podmnožiny množiny hran, z níž žádné dvě hrany nesdílí společný vrchol). Pomocí tohoto algoritmu nalezněte maximální párování v grafu na obrázku 1 (při provádění algoritmu dodržujte zásadu, že při vybírání z několika vrcholů algoritmus vždy vybere ten s nejnižším číslem). Své kroky komentujte.

3. (6 bodů) S využitím vytvořujících funkcí řešte rekurenci

$$g_n = g_{n-1} + \frac{3}{4} g_{n-2}, \quad g_0 = 0,\ g_1 = 4.$$

4. (6 bodů) Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu součinu $\sin 31^\circ \operatorname{tg} 44^\circ$. Při výpočtu pracujte s obloukovou mírou (tj. $1^\circ = \frac{\pi}{180}$).



Obr. 1: Obrázek k příkladu na párování.

Návod k řešení:

Teorie: a) ANO - jsou-li všechny vlastní hodnoty kladné (záporné), je matice pozitivně (negativně) definitní; b) NE - chybí předpoklad souvislosti; c) ANO – dokáže se snadno z definice limity; d) NE - může být také inflexním bodem nebo sedlovýn bodem; e) ANO - pokud se neopakují vrcholy, jistě se nemohou opakovat ani hrany; f) ANO - např. $K_{3,3}$ a "šestiúhelník" s vhodnými třemi úhlopříčkami.

1. Integrujeme nejprve ve směru osy x mezi rameny lichoběžníka, poté pro y jdoucí od 0 do v: $S = \int_0^v \int_{\frac{yd}{v}}^{\frac{y(c-b)}{v}+b} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^v \left(\frac{y(c-b)}{v} + b - \frac{yd}{v} \right) \mathrm{d}y = \cdots = v \left(\frac{b+c-d}{2} \right).$

2. Řešení buď převedením na hledání maximálního toku v odvozené síti nebo pomocí "maďarského" algoritmu z přednášky. Maximální párování má 4 hrany, které snadno najdeme, ale při předepsaném postupu *podle velikosti* je nezbytné "se vracet".

3. Vyjádříme rekurenci tak, aby platila pro všechna přirozená n včetně 0 a 1:

$$g_n = g_{n-1} + \frac{3}{4} g_{n-2} + 4[n = 1].$$

Vynásobíme obě strany x^n, sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}$ a dostaneme rovnici

$$G(x) = xG(x) + \frac{3}{4} x^2 G(x) + 4x.$$

Úpravou snadno dostaneme

$$G(x) = \frac{4x}{1 - x - \frac{3}{4}x^2}.$$

Tuto racionální lomenou funkci upravíme na součet parciálních zlomků (rozložíme jmenovatele na součin kořenových činitelů a např. metodou neurčitých kkoeficinů nalezneme čitatele): $G(x) = A/(1 - \frac{3}{2}x) + B/(1 + \frac{1}{2}x)$, z čehož roznásobením a porovnáním koeficientů u x^0 a x^1, příp. dosazením vhodných hodnot za x dostaneme $A = 2$, $B = -2$. Výsledné funkce rozvineme do řady (jde o funkce tvaru $1/(1 - cx)$).

Celkem

$$g_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^n - 2 \cdot \left(\frac{-1}{2} \right)^n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(3^n - (-1)^n \right).$$

4. $f(x,y) = \sin x \operatorname{tg} y$, tedy $f'_x = \cos x \operatorname{tg} y$ a $f'_y = \sin x / \cos^2 y$. Pak

$$\sin(\frac{\pi}{6} + \mathrm{d}x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathrm{d}x + \mathrm{d}y.$$

Tedy $\sin 31^\circ \operatorname{tg} 44^\circ \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} - \frac{\pi}{180}$.

Matematika III $\boxed{\text{B}}$
4. ledna 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Potřebné minimum (včetně bonusu) je 15 bodů.
Na práci máte 90 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Graf K_4 není rovinný.

(b) **ano — ne** Existuje v Petersenově grafu hamiltonovská cesta (tj. cesta procházející každým vrcholem právě jednou)?

(c) **ano — ne** Každá Cauchyovská posloupnost bodů v E_n je i konvergentní.

(d) **ano — ne** Funkce e^x je exponenciální vytvořující funkcí posloupnosti samých jedniček.

(e) **ano — ne** Plyne z existence diferenciálu f v bodě a její spojitost v tomto bodě?

(f) **ano — ne** Libovolná spojitá funkce nabývá na kompaktní množině svého absolutního extrému výhradně v některém stacionárním nebo hraničním bodě.

Příklady:

1. (6 bodů) Najděte rovnice tečné roviny a normály k ploše dané implicitně rovnicí

$$z = y + \ln \frac{x}{z}$$

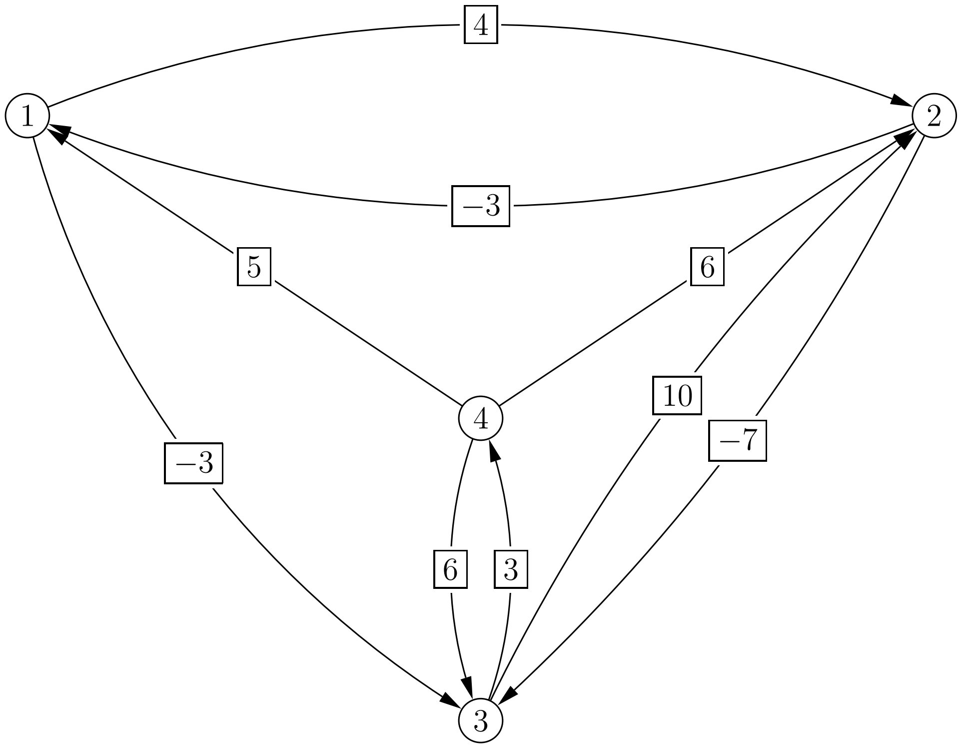
v bodě $(e, 0, 1)$.

2. (6 bodů) Uveďte Floydův algoritmus pro nalezení nejkratších cest mezi všemi dvojicemi vrcholů. Tento algoritmus použijte na orientovaný graf na obrázku 1. Jednotlivé mezivýpočty zapisujte do matic. Uveďte, jak se v průběhu výpočtu detekují cykly záporné délky.

3. (6 bodů) Určete kolika způsoby je možné naplnit tašku n kusy ovoce, přičemž jednotlivé kusy téhož druhu nerozlišujeme a navíc:

- jablek musí být sudý počet,
- banánů musí být násobek 5,
- pomeranče musí být nejvýše 4 a
- hruška může být pouze jedna (nebo žádná). (*Nápověda: vytvořující funkce*)

4. (6 bodů) Pomocí lichoběžníkového pravidla odhadněte určitý integrál $\int_0^7 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ s využitím hodnot integrované funkce v uzlech $0, 1, 2, 3, 5, 7$. Z charakteru integrované funkce odvoďte, jestli tento odhad bude vyšší nebo nižší než skutečná hodnota integrálu.



Obr. 1: Obrázek k příkladu na hledání minimálních cest.

Návod k řešení:

Teorie: a) NE - je rovinný – snadno se nakreslí; b) ANO - cesta existuje (snadno), hůře se dokáže neexistence hamiltonovské kružnice; c) ANO - každá konvergentní posloupnost v E_n má limitu (E_n je tzv. úplný prostor); d) ANO - je snadno vidět z rozvoje do řady; **obyčejnou** funkcí samých jedniček je přitom $1/(1-x)$; e) ANO - existence diferenciálu je nejsilnější z postupně budovaných požadavků, z nichž žádný ke spojitosti nestačil (parciální derivace, směrové derivace); f) NE - chybí požadavek diferencovatelnosti, protipříkladem je např. obyčejná absolutní hodnota, která žádný stacionární bod nemá, ale absolutní minimum ano.

1. Označme $F(x,y,z) = \ln\frac{x}{z} + y - z$. Normálový vektor k ploše $z = z(x,y)$ dané implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 0$ v bodě $A = [e,0,1]$ se spočítá jako $(F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$. Protože $F'_x = \frac{1}{x}$, $F'_y = 1$, $F'_z = -1-\frac{1}{z}$, je $(F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A)) = (1/e, 1, -2)$. Normálu můžeme tedy snadno vyjadřit v parametrickém tvaru

$$n = [e,0,1] + t\cdot(1/e, 1, -2).$$

Normálový vektor nám zároveň udává koeficienty v obecné rovnici tečné roviny (neboť ta je kolmá na normálu)

$$\frac{1}{e}\cdot x + y - 2z = c,$$

kde c určíme tak, aby v dané rovině ležel i bod A (dosazením snadno $c = -1$, rovnice tečné roviny je tedy $\frac{1}{e}\cdot x + y - 2z + 1 = 0$.

Jinak: Budeme nejprve hledat tečnou rovinu ve tvaru

$$(z - z_0) = z'_x(x - x_0) + z'_y(y - y_0)$$

a z ní pak obdobně jako výše odvodíme rovnici normály. Parciální derivace funkce $z = z(x,y)$ přitom dostaneme "derivováním" implicitní rovnice (přitom se ale na z díváme jako na funkci x a y) a vyjádřením hledaných parciálních derivací. Derivací podle x dostaneme:

$$\frac{z}{x}\frac{z - xz'_x}{z^2} - z'_x = 0,$$

odkud $z'_x = \frac{z}{x(1+z)}$. Podobně podle y:

$$\frac{z}{x}\cdot\frac{-xz'_y}{z^2} + 1 - z'_y = 0,$$

a tedy $z'_y = \frac{z}{z+1}$. Dosazením $x = e, y = 0, z = 1$ dostaneme příslušné parciální derivace v bodě A a tedy i rovnici tečné roviny.

2. Floyd-Warshallův algoritmus používá následující myšlenku (vrcholy očíslované $1, \dots, v$:

Postupně klademe $k = 1, \dots, v$ a v každé iteraci cyklu najdeme nejkratší cestu z i do j, s vlastností, že po cestě můžeme navštívit pouze vrcholy od 1 do k. Toho lze snadno docílit další dvojicí vnořených cyklů pro všechna i a pro všechna j, kdy uvnitř provedeme aktualizaci

$$\mathrm{cesta}(i,j) = \min(\mathrm{cesta}(i,j), \mathrm{cesta}(i,k) + \mathrm{cesta}(k,j)).$$

Záporný cyklus se detekuje, jakmile se na diagonále objeví záporné číslo.

V našem případě algoritmus (při maticovém zápisu) vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & \infty \\ -3 & 0 & -7 & \infty \\ \infty & 10 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & \infty \\ -3 & 0 & -7 & \infty \\ \infty & 10 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & \infty \\ -3 & 0 & -7 & \infty \\ 7 & 10 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -7 & -4 \\ 7 & 10 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -7 & -4 \\ 6 & 9 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$$

3. Výsledkem je koeficient u x^n v řadě

$$(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots,$$

a tedy odpověď je $n+1$.

4. Počítáme obsahy lichoběžníků se základnami určenými příslušnými uzlovými body: $\int_0^7 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \approx \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4}+\frac{1}{6}) + (\frac{1}{6}+\frac{1}{8}) = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$. Odhad je vyšší než počítaný integrál ($\ln 8$), protože integrovaná funkce $1/(1+x)$ je na daném intervalu konvexní.