Matematika III $\boxed{\textbf{A}}$
30. ledna 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Potřebné minimum (včetně bonusu) je 15 bodů.
Na práci máte 90 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Je-li hessián funkce f v daném stacionárním bodě indefinitní, nemůže být tento bod lokálním extrémem f.

(b) **ano — ne** Dva grafy jsou izomorfní, právě když se jejich skóre liší pouze permutací.

(c) **ano — ne** Graf $K_{4,4}$ není rovinný.

(d) **ano — ne** Každý tah v grafu je zároveň cestou.

(e) **ano — ne** Plyne z existence derivací v libovolném směru funkce f v bodě a i spojitost f v bodě a?

(f) **ano — ne** Množina $\{[x, y] \in E_2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ je uzavřená.

Příklady:

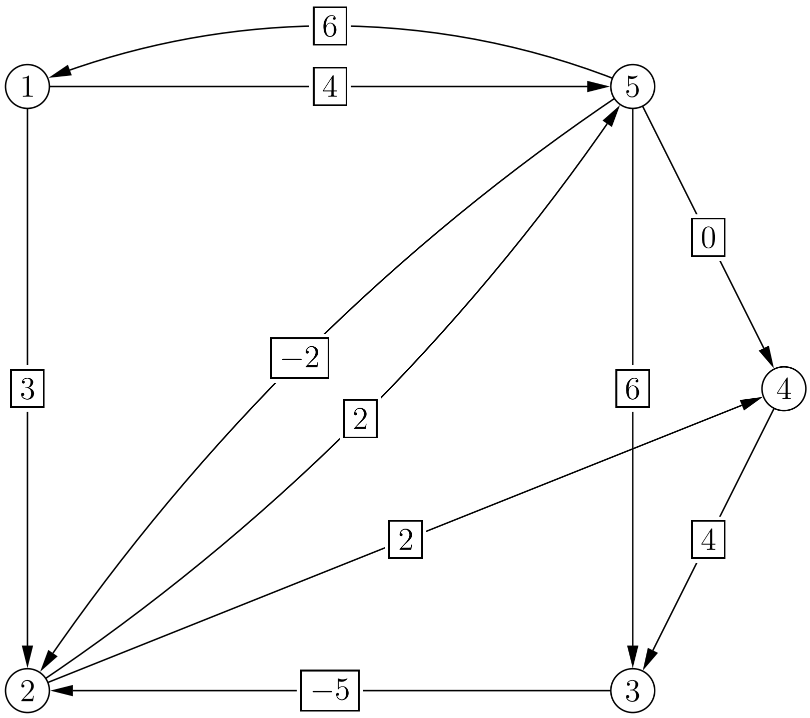
1. (6 bodů) S využitím integrálního počtu určete souřadnice těžiště tělesa určeného podmínkami $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, jestliže hustota tohoto tělesa v bodě $[x, y, z]$ je dána vzorcem $\rho(x, y, z) = x + y + z$.
(Tip: výpočtu některých integrálů je možné se pomocí vhodných úvah vyhnout.)

2. (6 bodů) Uveďte nějaký algoritmus pro nalezení nejkratších cest mezi všemi dvojicemi vrcholů. Tento algoritmus použijte na orientovaný graf na obrázku 1. Jednotlivé kroky výpočtu vhodným způsobem zapisujte. Uveďte, jak se v průběhu výpočtu detekují cykly záporné délky a odhadněte časovou složitost algoritmu.

3. (6 bodů) Nechť je funkce $y = y(x)$ dána v okolí bodu $[1, 1]$ implicitně rovnicí $y^3 - 2xy + x^2 = 0$. Určete Taylorův polynom 2. stupně této funkce v bodě $x_0 = 1$.

4. (6 bodů) Řešte rekurenci

$$a_{n+1} = a_n + n(-1)^n \quad (\text{pro } n \geq 1), \quad a_0 = 1,\ a_1 = 1.$$



Obr. 1: Obrázek k příkladu na hledání minimálních cest.

Návod k řešení:

Teorie: a) ANO - indefinitnost znamená, že v některém směru se příslušná směrová derivace zvýší (bude tedy kladná) a v některém sníží (a bude tedy záporná), proto daný stacionární bod nemůže být lokálním extrémem; b) NE - mnoho příkladů, např. (2,2,2,2,2,2) odpovídá jak C_6, tak $C_3 \cup C_3$; c) ANO - jeho podgrafem je $K_{3,3}$; d) NE - na cestě se nesmějí opakovat ani vrcholy, na tahu mohou; e) NE - spojitost plyne až z existence diferenciálu (př. viz přednáška); f) ANO

1.

2. Floyd.

3.

4.

Matematika III $\boxed{\text{B}}$
30. ledna 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Potřebné minimum (včetně bonusu) je 15 bodů.
Na práci máte 90 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Plyne z existence derivací v libovolném směru funkce f v bodě a i existence všech parciálních derivací f v bodě a?

(b) **ano — ne** Neexistuje žádný graf, jehož skóre je $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

(c) **ano — ne** Existuje-li limita funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ v daném bodě, pak je f v tomto bodě spojitá.

(d) **ano — ne** V dané síti je velikost každého řezu větší než kapacita libovolného toku.

(e) **ano — ne** Každý rovinný graf obsahuje alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5.

(f) **ano — ne** Je-li v grafu G daný vrchol artikulací, pak je nutně některá hrana z něj vycházející mostem.

1. (8 bodů) S využitím integrálního počtu určete souřadnice těžiště obecného lichoběžníku s vrcholy o souřadnicích $A = [0, 0]$, $B = [b, 0]$, $C = [c, v]$, $D = [d, v]$. Předpokládejte přitom, že $0 < d < c < b$ a $0 < v$.
(Pozn: pokud znáte vzorec pro obsah lichoběžníku, nemusíte obsah počítat pomocí integrace, ale můžete jej spočítat podle tohoto vzorce.)

2. (6 bodů) Najděte s využitím Tarjanova algoritmu[1] silně souvislé komponenty v grafu $G = (V, E)$, kde $V = \{1, \dots, 11\}$ a množina hran E je dána výčtem

$$\begin{array}{cccccc} (1,5) & (3,9) & (5,9) & (7,2) & (9,8) & (10,6) \\ (2,1) & (4,6) & (5,10) & (7,11) & (9,10) & (11,8) \\ (2,7) & (5,4) & (6,5) & (8,11) & (10,3) & \end{array}$$

Popište stručně použitý algoritmus. Jednotlivé kroky vhodně zapisujte, nakreslete obrázek.

3. (4 body) Uveďte Eulerovu formuli pro souvislé rovinné grafy a s jejím využitím dokažte omezení $|E| \leq 3|V| - 6$ pro počet hran v závislosti na počtu vrcholů v souvislém rovinném grafu.

Otočte list!

[1] Algoritmus probíraný na demonstračním cvičení

4. (6 bodů) Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů nalezněte body, v nichž má funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ na množině $M = \{[x,y] \in E_2; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\}$ vázaný extrém (a, b jsou libovolné nenulové reálné parametry). Určete funkční hodnotu v těchto bodech a pomocí hessiánu rozhodněte, jde-li o maximum nebo minimum. Popište rovněž význam výsledku z geometrického hlediska.

Návod k řešení:

Teorie: a) ANO - parciální derivace jsou spec. případem směrových; b) ANO - součet stupňů musí být sudý; c) NE - limita musí být rovna funkční hodnotě; d) NE - nerovnost je neostrá; e) ANO - dokáže se snadno z nerovnosti $|E| \leq 3|V| - 6$; f) NE.

1.

2. Tarjanův algoritmus: (*Podrobněji viz studijní materiály k demonstračním cvičení, kde je k dispozici i animovaná ukázka.*)

- Každý vrchol označujeme dvojicí čísel, z nichž první určuje **pořadí příchodu** a druhý **pomocné číslo**, které se v průběhu aktualizuje a rozhoduje o příslušnosti ke komponentě (zároveň máme u každého vrcholu odkaz na jeho předchůdce).
- Při prvním příchodu do vrcholu ho označíme dvojicí `pořadí`, `pořadí`.
- Pokud existuje hrana do dosud nenavštíveného vrcholu, jdi do něj.
- Pokud existuje hrana do již navštíveného vrcholu, nahraď pomocné číslo stávajícího vrcholu pomocným číslem vrcholu, do nějž směřuje hrana (pouze, je-li menší).
- Pokud neexistuje nepoužitá hrana a obě čísla u daného vrcholu jsou stejná, přiřaď všechny dosud nezařazené vrcholy, které mají pomocné čísla *větší nebo rovno* číslu současného vrcholu do téže komponenty. Vrať se do předchůdce a aktualizuj jeho pomocné číslo číslem vrcholu, z nějž se vracíme (je-li menší).
- Pokud neexistuje nepoužitá hrana a čísla u daného vrcholu jsou různá, vrať se do předchůdce a aktualizuj jeho pomocné číslo číslem vrcholu, z nějž se vracíme (je-li menší).
- Nejsou-li ještě vyčerpány všechny vrcholy a z právě zpracovaného vrcholu již není, kam se vrátit, zvol jiný vrchol a pokračuj v algoritmu.

Postup v naší úloze (hrany jsou vybírány v pořadí zápisu v tabulce shora dolů):

$1_{1,1}, 5_{2,2}, 4_{3,3}, 6_{4,4}, 6_{4,\mathbf{2}}, 4_{3,\mathbf{2}}, 5_{2,2}, 9_{5,5}, 8_{6,6}, 11_{7,7}, 11_{7,\mathbf{6}}, 8_{6,6}$. Nyní uzavřeme komponentu tvořenou všemi vrcholy s pomocným číslem ≥ 6, tj. 8 a 11. Tyto vrcholy a s nimi incidentní hrany již dále neuvažujeme. Návrat do $9_{5,5}, 10_{8,8}, 3_{9,9}, 3_{9,\mathbf{5}}, 10_{8,\mathbf{5}}, 10_{8,\mathbf{4}}, 9_{5,\mathbf{4}}, 5_{2,2}, 5_{2,2}$ (v posledním kroku jsme chtěli jít poslední hranou z 5 – do 10, ale tam jsme již byli a ani pomocné číslo neaktualizujeme – u 10 je 4 u 5 již je 2). Už nemáme z 5 kam jít a obě čísla jsou stejná, proto uzavíráme komponentu: $5, 9, 10, 3, 4, 6$. Prostřednictvím předchůdců se vracíme do 1, z níž není úniku a navíc tvoří samostatnou komponentu. Ještě jsme nevyčerpali všechny vrcholy: $2_{10,10}, 7_{11,11}, 7_{11,\mathbf{10}}, 2_{10,10}$ a uzavíráme komponentu $2, 7$.

3. Eulerova formule: $|V| + |S| = |E| + 2$. Protože každá stěna sousedí s alespoň 3 hranami a každá hrana odděluje právě 2 stěny, můžeme dvěma způsoby odhadnout počet incidentních dvojic (hrana, stěna): $3|S| \leq 2|E|$, tj. $|S| \leq \frac{2}{3}|E|$ a po dosazení do Eulerovy formule dostaneme $|E| + 2 \leq |V| + \frac{2}{3}|E|$, z čehož snadno plyne dokazovaná nerovnost. (Pozn. k teorii e): kdyby měl každý vrchol stupeň aspoň 6, pak je $2|E| \geq 6|V|$, což je ve sporu s právě dokázanou nerovností).

4.