

Matematika III – demonstrační cvičení

Michal Bulant

18. prosince 2009

1. demonstrační cvičení

Příklad 1. *Zobrazte v rovině definiční obory funkcí:*

a) $f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{3} + 2y\right),$

b) $f(x, y) = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)},$

c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)},$

d) $f(x, y) = \arccos \frac{x}{x+y}.$

Příklad 2. Určete definiční obor funkcí:

a) $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln z,$

b) $f(x, y, z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Příklad 3. *Načrtněte vrstevnice funkcí:*

a) $f(x, y) = x^2 - y^2,$

b) $f(x, y) = x^y,$

c) $f(x, y) = \sqrt{xy}.$

Příklad 4. *Rozhodněte, zda je daná posloupnost cauchyovská:*

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, kde $n \in \mathbb{N}$,

b) a^n , kde $n \in \mathbb{N}$ (v závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$).

c) $\frac{n+1}{n^2}$.

Příklad 5. Určete všechny hromadné body množiny:

a) \mathbb{Z} ,

b) \mathbb{Q} ,

c) $\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots\}$,

d) $\{3(1 - \frac{1}{n}) + 2(-1)^n; n \in \mathbb{N}\}$.

Příklad 6. *Určete tečnu křivky dané předpisem*

$$f(t) = (2 \cos t + \cos 3t, \sin 2t, t)$$

v bodě $t = \frac{3\pi}{2}$.

Příklad 7. Na křivce (t, t^2, t^3) najděte takový bod, že jím procházející tečna je rovnoběžná s rovinou $x + 2y + z = 1$.

Příklad 8. *Vypočtěte limity:*

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1},$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy^2 \cos \frac{1}{xy^2},$$

$$d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x},$$

$$e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$$

$$f) \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)},$$

$$g) \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, 1)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

2. demonstrační cvičení

Příklad 9. *Dokažte, že následující limity neexistují:*

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2},$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}.$

Příklad 10. *Vypočtete všechny parciální derivace (i smíšené) funkce*

$$f(x, y) = x^4 + 10x^2y^3 - 2y^6$$

až do řádu 3 včetně.

Příklad 11. *Určete směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ v bodě $[-1, 1]$ ve směru vektoru $(1, 2)$.*

Příklad 12. *Vypočtete parciální derivace 1. řádu funkcí*

a) $f(x, y) = x^{xy},$

b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}.$

Příklad 13. Určete diferenciál v daném bodě:

a) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$ v bodě $[1, 1]$,

b) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě $[1, \sqrt{3}]$.

3. demonstrační cvičení

Příklad 14. *Rozhodněte, zda je funkce*

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

diferencovatelná v $[0, 0]$.

Příklad 15. Pomocí diferenciálu přibližně vypočtete:

a) $\arcsin \frac{0,48}{1,05}$,

b) $1,04^{2,02}$.

Příklad 16. Určete rovnici tečné nadroviny ke grafu funkce v daném bodě:

a) $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 4]$,

b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, -1, ?]$.

Příklad 17. *Určete Taylorův polynom 2. stupně se středem v daném bodě:*

a) $\ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad [x_0, y_0] = [1, 1],$

b) $x^{\frac{y}{z}}, \quad [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1].$

Příklad 18. Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně přibližně vypočtěte

a) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$,

b) $\ln(x^2 + y^2 + 1)$ v bodě $[1, 1; 1, 2]$.

Příklad 19. Pomocí vrstevnic funkce

$$f(x, y) = |x| + |y|$$

určete její největší a nejmenší hodnotu na množině $M : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.

Příklad 20. *Určete absolutní extrémy funkce*

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

množině $M : x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

4. demonstrační cvičení

Příklad 21. *Určete stacionární body funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y + y^2x - xy$ a rozhodněte, které z těchto bodů jsou lokálními extrémy a jakého druhu.*

Příklad 22. Ukažte, že funkce $f(x, y) = e^x \sin(y) + e^y \sin(x)$ definuje předpisem $f(x, y) = 1$ pro $[x, y] \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ implicitně proměnnou y jako funkci proměnné x . Určete $f'(x)$.

Příklad 23. *Rozhodněte, zda existují maxima a minima funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - 2y$ na křivce dané rovnicí $y - x^3 - 2x - 1 = 0$. Uvažujte křivku omezenou na interval $\langle 0, 5 \rangle$.*

Příklad 24. Zjistěte, zda existují maxima a minima funkce $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na elipse $z^2 = x^2 + y^2, x - y + z + 1 = 0$.

5. demonstrační cvičení

Příklad 25. *Rozhodněte, zda křivka $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ leží v okolí bodu $[1, 1]$ nad (nebo pod) svojí tečnou.*

Příklad 26. *Rozhodněte, zda plocha daná v okolí $[1, 0, 1] \in E_3$ rovnicí $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0$ leží v bodě $[1, 0, 1]$ nad nebo pod tečnou rovinou.*

Příklad 27. Najděte lokální extrémy funkce $y = y(x)$ dané implicitně rovnicí $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Příklad 28. *Určete parametrickou rovnici tečny v bodě $[x_0, y_0, z_0]$, $z_0 > 0$ ke křivce, jež vznikla jako průsečík kulové plochy $K : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ s válcovou plochou $V : x^2 + y^2 - 2x = 0$ (tzv. Vivianiho křivka).*

Příklad 29. Výrobce uvažuje možnost produkce dvou výrobků V_1 a V_2 . Pro jejich výrobu může počítat s využitím 180 kg surovin, 240 hodin práce speciálních strojů a náklady jsou přitom omezeny částkou 160 tis. Kč. Na základě předpokládaných tržeb byl stanoven očekávaný zisk za 1 kus výrobku V_1 na 7 tis. Kč a za 1 kus výrobku V_2 na 9 tis. Kč. Z předběžného průzkumu zájmu vyplynulo, že oba výrobky lze prodat v libovolném množství.

V rámci přípravy produkce byla stanovena náročnost obou výrobků z hlediska spotřeby zdrojů na 1 kus:

Výrobek	spotřeba surovin [kg]	spotřeba času [h]	náklady [tis.Kč]
V_1	3	5	10
V_2	5	4	2

Vzhledem k uvedeným skutečnostem naplánujte výrobu tak, aby výrobci přinesla nejvyšší zisk.

6. demonstrační cvičení

Příklad 30. Vypočtete $\iint_M xy \, dx \, dy$, kde M je oblast $1 \leq x \leq 4, \frac{1}{x} \leq y \leq \sqrt{x}$.

Příklad 31. *Převeďte dvojný integrál $\iint_A f(x, y) \, dA$ na dvojnásobný (obě možnosti pořadí integrace) pro množinu A ohraničenou přímkami $y = x, y = x - 3, y = 2, y = 4$. Ověřte (přímo nebo s využitím SW např. MAW) rovnost výsledku pro konkrétní funkci $f(x, y) = y$.*

Příklad 32. Zaměňte pořadí integrace $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x, y) \, dy \, dx$.

Příklad 33. *Vypočtete integrál*

$$\iint_A (x + y) \, dx \, dy,$$

kde A je ohraničena grafy funkcí $y = x^2, y = x$.

Příklad 34. *Vypočtete integrál*

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2 \, dx \, dy.$$

Příklad 35. *Vypočtete objem tělesa ohraničeného souřadnými rovnicami a plochami $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$.*

Příklad 36. *Vypočtete integrál*

$$\iint_A 2(x^2 + y^2) \, dA,$$

kde $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|\}$.

Příklad 37. *Spočtěte integrál*

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx.$$

Příklad 38. Pomocí vhodné transformace souřadnic vypočtete integrál $\iint_A \sqrt{xy} \, dx \, dy$, kde množina A je ohraničena křivkami

$$y^2 = 2x, \quad y^2 = x, \quad xy = 1, \quad xy = 2.$$

7. demonstrační cvičení

Příklad 39. *Vypočtete integrál*

$$\iiint_A (x^2 + y^2 + z^2) \, dA,$$

kde $A : x^2 + y^2 \leq a^2, z \geq 0, z \leq b, a, b > 0$ jsou parametry.

Příklad 40. Vypočtěte objem množiny A , která je průnikem koulí $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8z$

(a) pomocí válcových souřadnic,

(b) pomocí sférických souřadnic.

Příklad 41. *Vypočtete integrál*

$$\iiint_A xy \, dA,$$

kde $A : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Příklad 42. *Určete souřadnice těžiště tělesa daného nerovnostmi*

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - (x^2 - y^2),$$

jehož hustota v daném bodě je trojnásobkem druhé mocniny vzdálenosti od roviny xy .

8. demonstrační cvičení

Příklad 43. Vypočtěte momenty setrvačnosti vzhledem k souřadným osám tenké homogenní rovinné lichoběžníkové desky s vrcholy v bodech $[-1, 0]$, $[2, 0]$, $[2, 2]$ a $[-1, 1]$.

Řešení. Hustota $\rho(x, y) = 1$ pro libovolná x, y . Integrujeme přes množinu $A : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{3}(x + 4)$.

$$\text{Dostaneme } J_x(A) = \iint_A y^2 \, dA = \frac{15}{4}, J_y(A) = \iint_A x^2 \, dA = \frac{21}{4}.$$

Příklad 44. *Hodnotu integrálu*

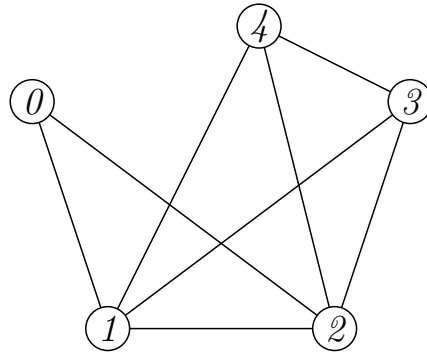
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

odhadněte pomocí

- (a) obdélníkového pravidla,*
- (b) lichoběžníkového pravidla*
- (c) Simpsonova pravidla,*

přičemž zadaný interval rozdělte na 3 intervaly téže délky. Dosažené výsledky porovnejte s přesnou hodnotou a pomocí obrázku zdůvodněte míru nepřesnosti jednotlivých pravidel.

Příklad 45. Pomocí matice souslednosti určete počet sledů délky 4 z vrcholu 0 do vrcholu 1 v následujícím grafu:



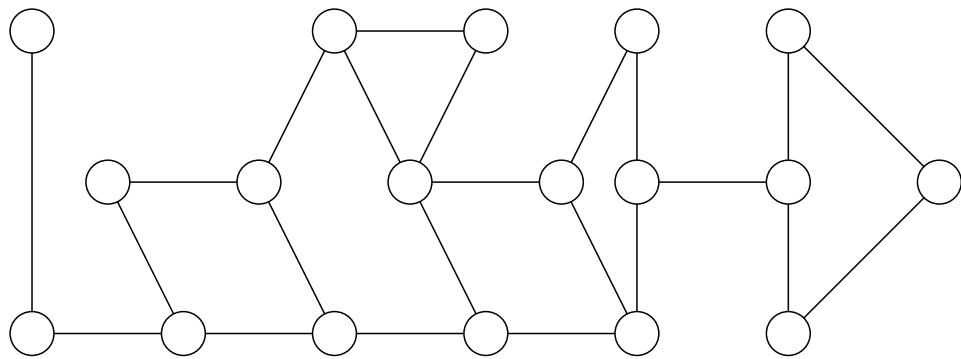
Příklad 46. *Ověřte, zda daná posloupnost je skóre nějakého grafu. Pokud ano, nějaký graf s tímto skóre nakreslete.*

(a) $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$,

(b) $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5)$.

Příklad 47. *Nakreslete alespoň dva neizomorfní grafy mající skóre $(2, 3, 3, 3, 3, 3, 5)$.*

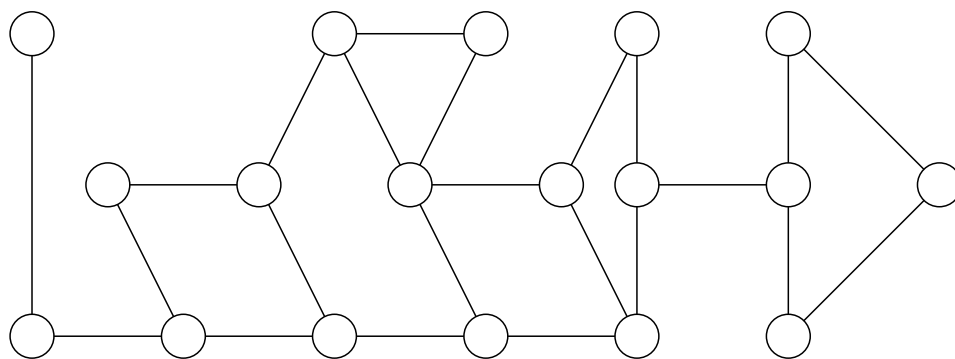
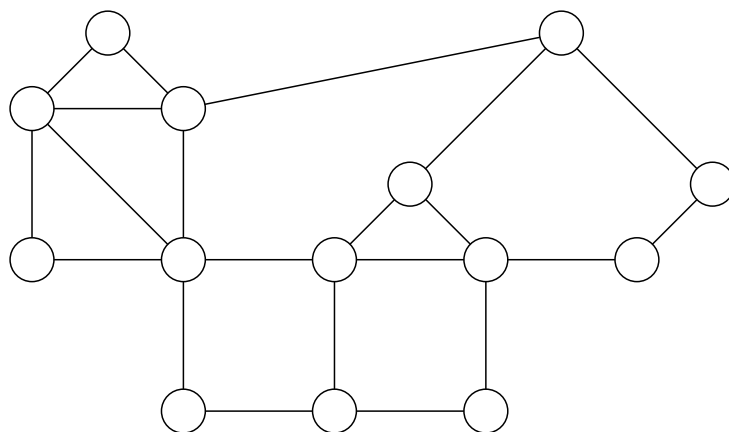
Příklad 48. *V grafu na obrázku najděte všechny mosty a artikulace.*



Příklad 49. Udejte příklad grafu, který obsahuje právě

- (a) 8 artikulací a 5 mostů,
- (b) 3 artikulace a 0 mostů,
- (c) 2 artikulace a 11 mostů.

Příklad 50. *Rozhodněte, zda jsou zobrazené grafy (vrcholově) 2-souvislé.*



Příklad 51. Najděte s využitím Tarjanova algoritmu silně souvislé komponenty v grafu $G = (V, E)$, kde $V = \{1, \dots, 11\}$ a množina hran E je dána výčtem

(1, 5) (3, 9) (5, 9) (7, 2) (9, 8) (10, 6)
 (2, 1) (4, 6) (5, 10) (7, 11) (9, 10) (11, 8)
 (2, 7) (5, 4) (6, 5) (8, 11) (10, 3)

Řešení. Postup z vrcholu 1: postup do hloubky: $1_{1,1} \rightarrow 5_{2,2} \rightarrow 4_{3,3} \rightarrow 6_{4,4}$. 5 již navštívená $\Rightarrow 6_{4,2}$, návrat $4_{3,2}$, návrat $5_{2,2}$, další hrana $\rightarrow 9_{5,5} \rightarrow 8_{6,6} \rightarrow 11_{7,7}$. 8 již navštívená $\Rightarrow 11_{7,6}$, návrat $8_{6,6}$. **Uzavřena komponenta 11,8.** Návrat $9_{5,5} \rightarrow 10_{8,8} \rightarrow 3_{9,9}$, 9 již navštívená $\Rightarrow 3_{9,5}$, návrat $10_{8,5}$, 6 již navštívená $\Rightarrow 10_{8,4}$, návrat $9_{5,4}$, návrat $5_{2,2}$, 10 již navštívená $\Rightarrow 5_{2,2}$ (beze změny). **Uzavřena komponenta 3,10,9,6,4,5.** Návrat $1_{1,1}$. **Uzavřena komponenta 1.** Ještě existují nezařazené vrcholy, začneme s $2_{10,10} \rightarrow 7_{11,11}$, 2 již navštívená $\Rightarrow 7_{11,10}$, návrat $2_{10,10}$. **Uzavřena komponenta 7,2.**

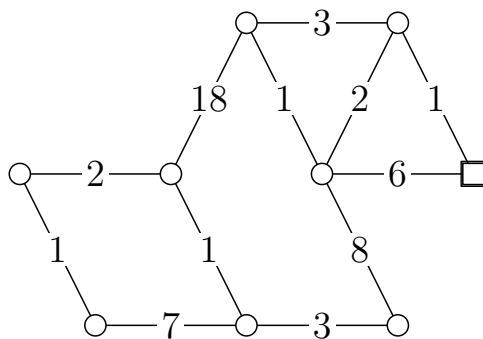
Postup z vrcholu 7: postup do hloubky: $7_{1,1} \rightarrow 2_{2,2} \rightarrow 1_{3,3} \rightarrow 5_{4,4} \rightarrow 9_{5,5} \rightarrow 8_{6,6} \rightarrow 11_{7,7}$. 8 již navštívená $\Rightarrow 11_{7,6}$, návrat $8_{6,6}$. **Uzavřena komponenta 11,8.** Návrat $9_{5,5}$, další hrana $\rightarrow 10_{8,8} \rightarrow 3_{9,9}$. 9 již navštívená $\Rightarrow 3_{9,5}$, návrat $10_{8,5}$, další hrana $6_{10,10}$, 5 již navštívená $\Rightarrow 6_{10,4}$, návrat $10_{8,4}$, návrat $9_{5,4}$, návrat $5_{4,4}$, další hrana $4_{11,11}$, 6 již navštívená $\Rightarrow 4_{11,10}$, návrat $5_{4,4}$, 10 již navštívená $\Rightarrow 5_{4,4}$ (beze změny). **Uzavřena komponenta 4,6,3,10,9,5.** Návrat $1_{3,3}$. **Uzavřena komponenta 1.** Návrat $2_{2,2}$, hrana (2,1) nemění nic, 7 již navštívená $\Rightarrow 2_{2,1}$, návrat $7_{1,1}$, hrana (7,11) nic nemění. **Uzavřena komponenta 2,7.**

Rozmyslete si změnu v případě, že by v grafu nebyla např. hrana (11,8) – nedojde k aktualizaci čísla u vrcholu 11 a tak zůstanou vrcholy 11 i 8 v samostatných komponentách.

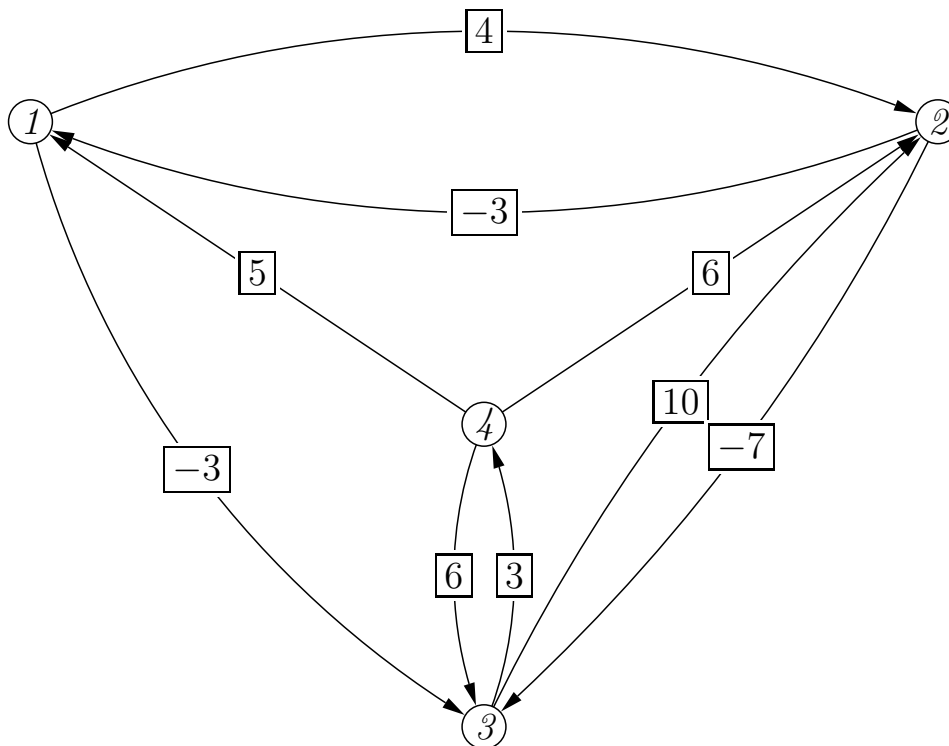
Příklad 53. *Udejte příklad*

- (a) *grafu s alespoň 4 vrcholy, který neobsahuje cyklus záporné délky a na němž dá Dijkstrův algoritmus chybný výsledek.*
- (b) *grafu s alespoň 4 vrcholy, který obsahuje (alespoň jednu) nezápornou hranu a přesto na něm dá Dijkstrův algoritmus správný výsledek.*

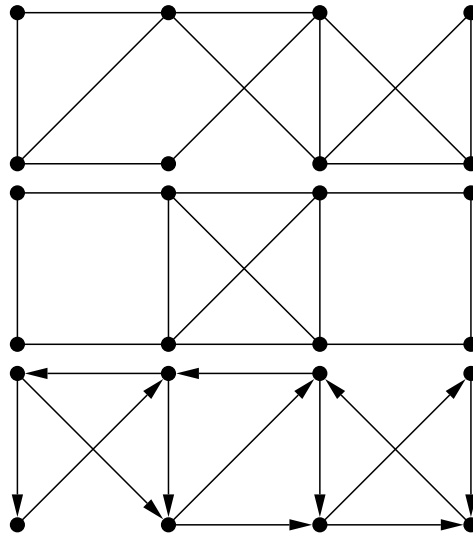
Příklad 54. *Užijte Bellman-Fordův algoritmus k nalezení nejkratších cest z vyznačeného vrcholu do všech ostatních vrcholů. Změňte ohodnocení hrany z 18 na -18, algoritmus proveďte s tímto novým grafem a ukažte, jak se detekují záporné cykly.*



Příklad 55. Uved'te Floydův algoritmus pro nalezení nejkratších cest mezi všemi dvojicemi vrcholů. Tento algoritmus použijte na orientovaný graf na obrázku. Jednotlivé mezivýpočty zapisujte do matic. Uved'te, jak se v průběhu výpočtu detekují cykly záporné délky.



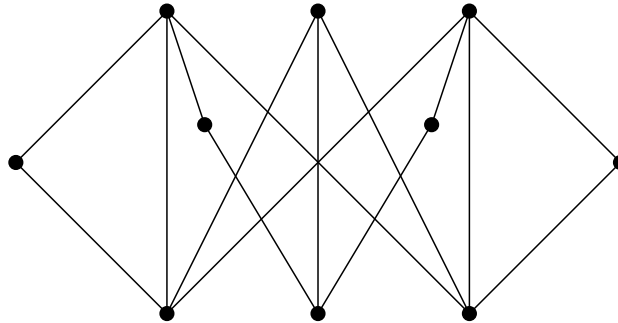
Příklad 56. Rozhodněte, zda jsou následující grafy eulerovské. Pokud nejsou, doplňte je přidáním hran na eulerovské (je-li to možné). Nalezněte eulerovské tahy.



Příklad 57. *Rozhodněte (a zdůvodněte), zda v Petersenově grafu existuje*

- 1. hamiltonovská cesta,*
- 2. hamiltonovská kružnice.*

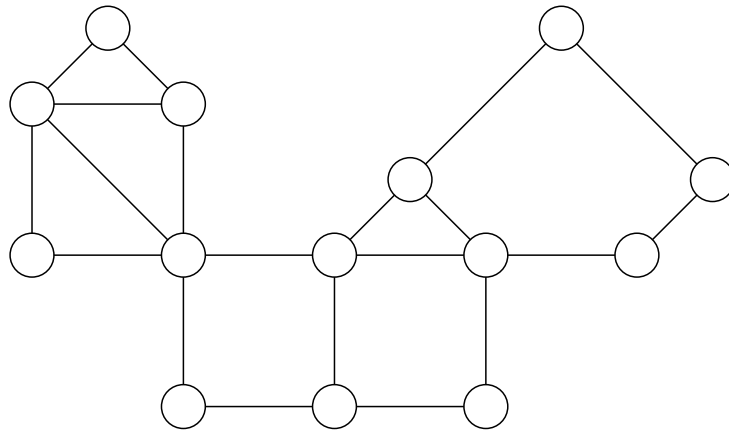
Příklad 58. *Rozhodněte, zda je daný graf*



rovinný. Zdůvodněte.

Příklad 59. *Rozhodněte, zda existuje graf mající skóre $(6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8)$.
Pokud ano, existuje i rovinný graf daného skóre?*

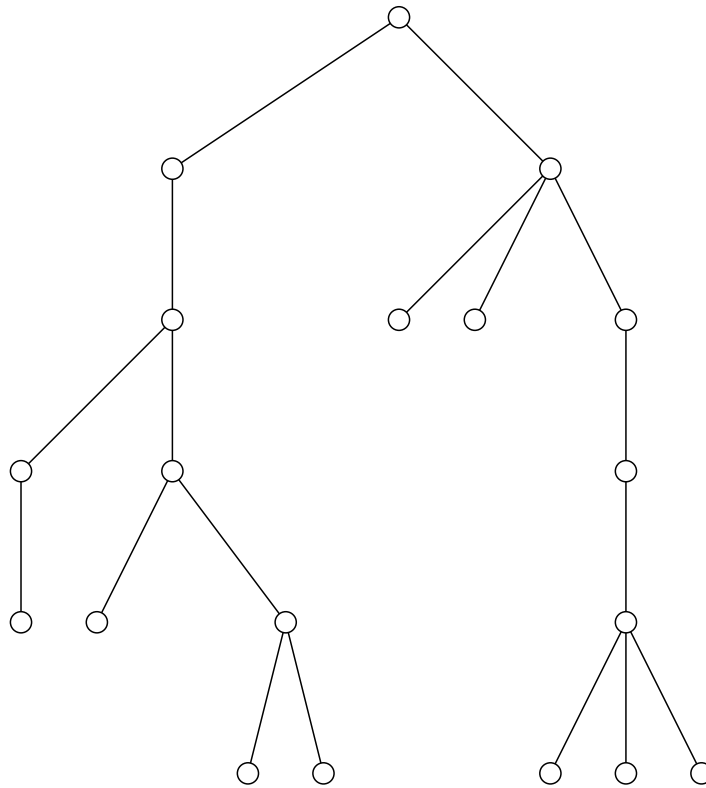
Příklad 60. *Rozhodněte, zda je daný rovinný graf maximální. Doplňte co nejvíce hran při zachování rovinnosti.*



Příklad 61. Každé z následujících tvrzení dokažte nebo ukažte vhodný protipříklad.

- (a) Každý graf s méně než 9 hranami je rovinný.
- (b) Graf, který není rovinný, není hamiltonovský.
- (c) Graf, který není rovinný, je hamiltonovský.
- (d) Graf, který není rovinný, není eulerovský.
- (e) Graf, který není rovinný, je eulerovský.
- (f) Každý hamiltonovský graf je rovinný.
- (g) Žádný hamiltonovský graf není rovinný.
- (h) Každý eulerovský graf je rovinný.
- (i) Žádný eulerovský graf není rovinný.

Příklad 62. *Určete kód pěstěného stromu na obrázku*



Příklad 63. *Nakreslete pěstěný strom, který má kód*

00000110010010111110010100001010111111.

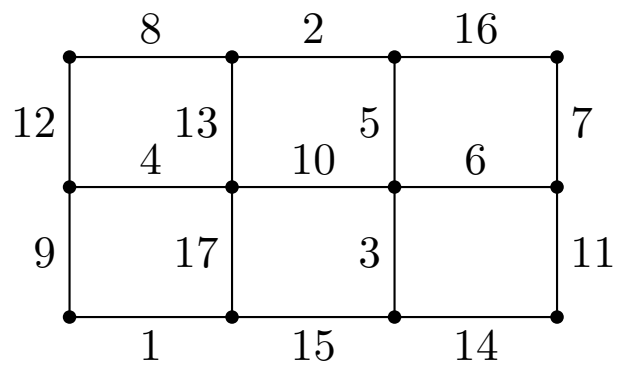
Příklad 64. *Určete počet (homo)morfismů grafů*

(a) P_2 do K_4 ,

(b) P_3 do K_7 ,

(c) K_4 do K_7 .

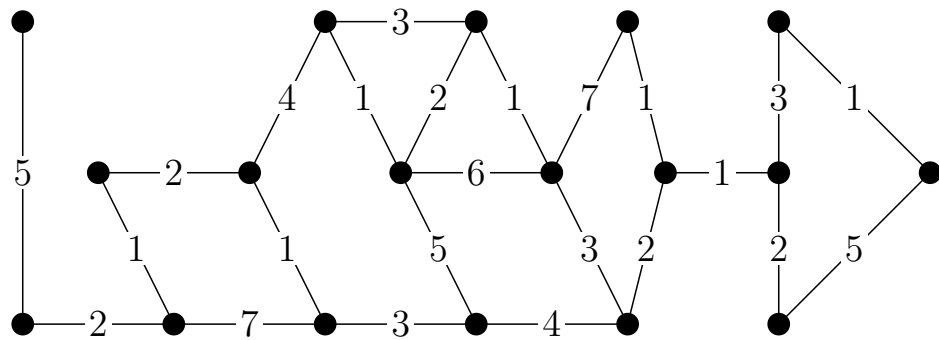
Příklad 65. *Najděte minimální kostru grafu*



Příklad 66. Najděte minimální kostru grafu na obrázku pomocí

(a) Kruskalova

(b) Jarníkova (Primova) algoritmu. Jak se výpočet změní, pokud hledáme maximální kostru?



Příklad 67. Udejte příklad, na němž ukážete nefunkčnost "naivního" algoritmu pro nalezení nejkratší cesty:

1. nalezněte minimální kostru,
2. za nejkratší cestu prohlásíme tu jedinou cestu spojující zadané 2 vrcholy, která leží v nalezení minimální kostře.

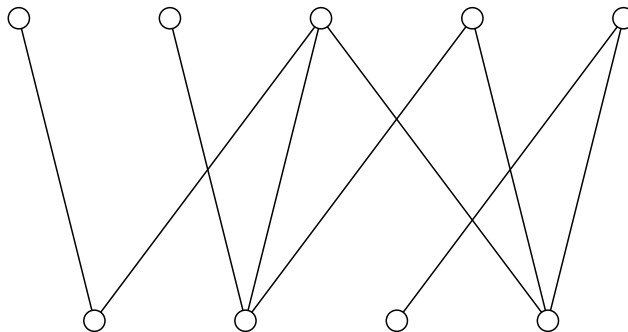
Příklad 68. Maximální párování v bipartitním grafu
Maďarský algoritmus (König, Egerváry, Kuhn)

Označujme kvůli jednoduchosti popisu vrcholy jedné skupiny v bipartitním grafu jako **červené**, vrcholy druhé skupiny jako **modré**. Budeme předpokládat, že vrcholy jsou obarveny tak, že počet červených vrcholů nepřevyšuje počet modrých.

Nechť je dán bipartitní graf $G = (V, E)$ a párování $M \subseteq E$. M -alternující cestou v G nazveme takovou cestu v G , jejíž hrany tvoří střídavě hrany z M a z $E \setminus M$. M -rozšiřující cestou v G nazveme M -alternující cestu, která spojuje dosud nepřirazený červený vrchol u s dosud nepřirazeným modrým vrcholem v .

1. Nalezneme libovolné párování M . Označíme všechny červené vrcholy jako přípustné.
2. Vyberme některý dosud nepřirazený přípustný červený vrchol v (pokud neexistuje, jsme hotovi) a nalezněme pro něj (např. prostřednictvím prohledávání do hloubky) M -alternující strom s kořenem ve v (pokud neexistuje, označme v jako nepřípustný a proces opakujme s jiným vrcholem). Pokud strom obsahuje nějakou M -rozšiřující cestu, odstraníme M -hrany v této cestě z M a ostatní hrany této cesty do M přidáme. Označme všechny červené vrcholy jako přípustné a proces opakujme.

V bipartitním grafu na obrázku najděte takovou maximální podmnožinu hran, že žádné dvě z nich nesdílejí společný vrchol.



Příklad 69. Huffmanovo kódování Pracujeme s pěstěnými binárními stromy, kde máme navíc každou hranu obarvenou některým symbolem z dané výstupní abecedy A (často $A = \{0, 1\}$). Kódovými slovy C jsou slova nad abecedou A , na která převádíme symboly vstupní abecedy. Naším úkolem je reprezentovat daný text pomocí vhodných kódových slov nad výstupní abecedou.

Je snadno vidět, že je užitečné chtít, aby seznam kódových slov byl bezprefixový (v opačném případě může nastat problém s dekódováním).

Ke konstrukci binárních prefixových kódů (tj. nad abecedou $A = \{0, 1\}$) využijeme binárních stromů. Označíme-li hrany vycházející z každého uzlu 0, resp. 1, a označíme-li navíc listy stromu symboly vstupní abecedy, dostaneme prefixový kód nad A pro tyto symboly zřetězením označení hran na cestě z kořene do příslušného listu.

Takto vytvořený kód je zřejmě prefixový. Uděláme-li tuto konstrukci navíc tak, abychom odrazili četnost symbolů vstupní abecedy v kódovaném textu, dosáhneme tak dokonce bezztrátové komprese dat.

Nechť M je seznam četností symbolů vstupní abecedy v textu. Algoritmus postupně zkonstruuje optimální binární strom (tzv. minimum-weight binary tree) a přiřazení symbolů listům.

- Vyber dvě nejmenší četnosti w_1, w_2 z M . Vytvoř strom se dvěma listy označenými příslušnými symboly a kořenem označeným $w_1 + w_2$, odeber z M hodnoty w_1, w_2 a nahraď je hodnotou $w_1 + w_2$.
- Tento krok opakuj; pouze v případě, že vybraná hodnota z M je součtem, pak nevyráběj nový list, ale "připoj" příslušný již existující podstrom.
- Kód každého symbolu urči cestou od kořene (např. vlevo="0", vpravo="1").

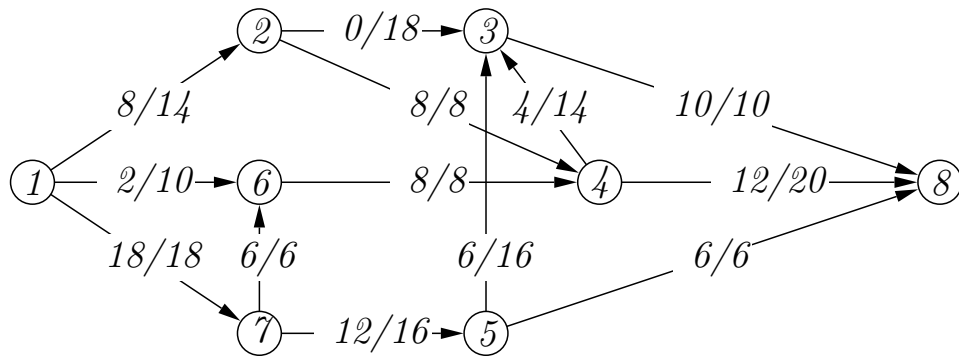
Nalezněte Huffmanův kód pro vstupní abecedu s frekvencemi [$'A'$:20, $'B'$:10, $'C'$:15, $'D'$:7, $'E'$:45, $'F'$:5].

8. demonstrační cvičení

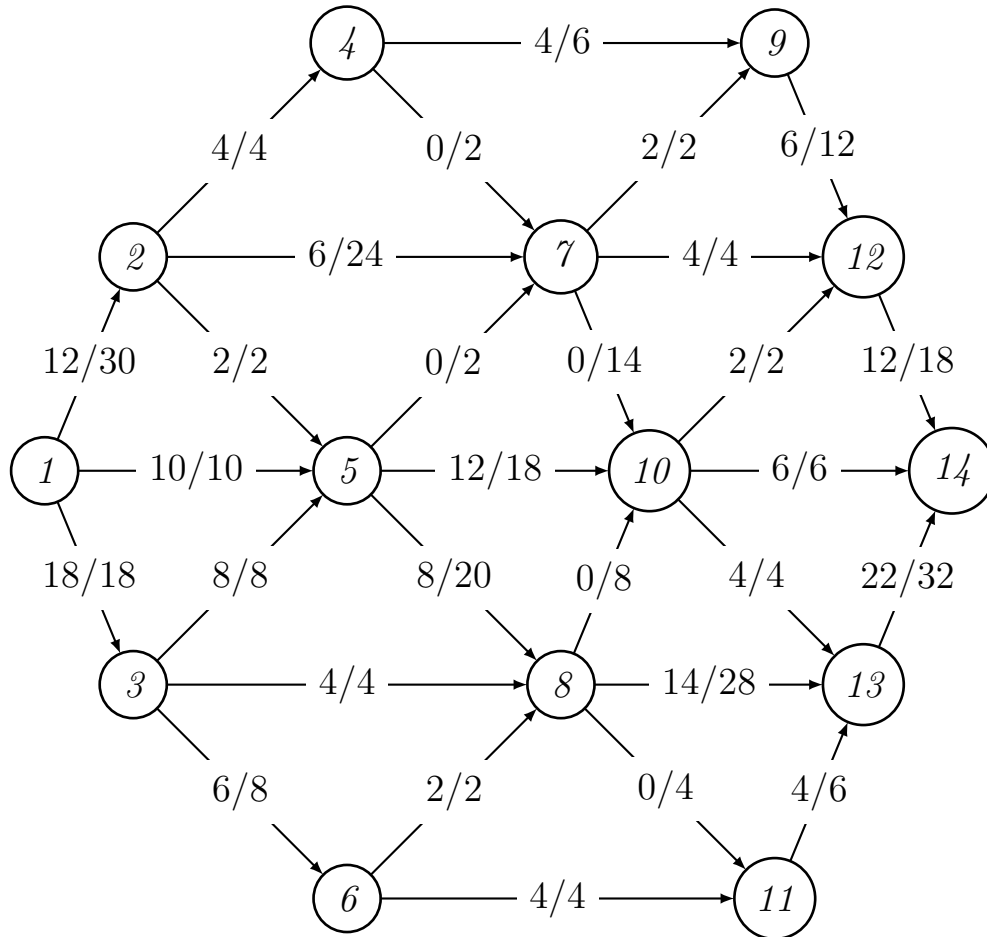
Příklad 70. *Určete hodnotu maximálního toku a najděte minimální řez v síti dané maticí kapacit A , kde vrchol 1 je zdroj a vrchol 8 stok.*

$$A = \begin{pmatrix} - & 16 & 24 & 12 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 30 & - & - & - \\ - & - & - & - & 9 & 6 & 12 & - \\ - & - & - & - & - & - & 21 & - \\ - & - & - & - & - & 9 & - & 15 \\ - & - & - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - & 18 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Příklad 71. Na obrázku je uveden tok v dané síti (čísla f/c udávají současný tok a kapacitu dané hrany). Zjistěte, je-li uvedený tok maximální, pokud ano, své tvrzení zdůvodněte. Pokud maximálním tokem není, maximální tok najděte a svůj postup podrobně popište. Uveďte některý minimální řez v dané síti.



Příklad 72. Nalezněte maximální tok a minimální řez v síti na obrázku (zdroj=1, stok=14).



Příklad 73. (a) *Určete vytvořující funkci posloupnosti*

$$(9, 0, 0, 2 \cdot 16, 0, 0, 4 \cdot 25, 0, 0, 8 \cdot 36, \dots).$$

(b) *Určete vytvořující funkci posloupnosti*

$$(9, 1, -9, 32, 1, -32, 100, 1, -100, \dots,).$$

Příklad 74. *S využitím vytvořujících funkcí řešte rekurenci*

$$a_{n+2} = a_n + n \quad (\text{pro } n \in \mathbb{N}), \quad a_0 = a_1 = 0.$$

Vyjádřete a_n jako funkci n jediným vzorcem bez rozlišování parity n .

Příklad 75. Určete najít formuli pro výpočet n -tého členu posloupnosti zadané rekurentně předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

[Návod: $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$, rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny polynomu $1-x-x^2$ a A, B vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek. Po substituci $\lambda_1 = 1/x_1, \lambda_2 = 1/x_2$ dostáváme vztah

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-\lambda_1 x} + \frac{b}{1-\lambda_2 x},$$

odkud snadno pomocí znalostí o vytvořujících funkcích $F_n = a \cdot \lambda_1^n + b \cdot \lambda_2^n$.
S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Uvážíme-li navíc, že $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_n snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$.

Navíc je vidět, že $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n/F_{n+1} = 1/\lambda_1 \approx 0.618$, což je poměr známý jako zlatý řez – objevuje se již od antiky v architektuře, výtvarném umění i hudbě.]

Příklad 76. Vyřešte rekurenci

$$a_0 = a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$$

[Návod:

- *Krok 1:* $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n [n \geq 0] + [n = 1]$.
- *Krok 2:* $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.
- *Krok 3:*

$$A(x) = \frac{1+x+x^2}{(1-2x)(1+x)^2}$$

- *Krok 4:* $a_n = \frac{7}{9}2^n + (\frac{1}{3}n + \frac{2}{9})(-1)^n$.

]

Příklad 77. *Řešte rekurenci*

$$a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 13/2.$$

Příklad 78. *S využitím vytvořující funkce pro Fibonacciho posloupnost $F(x) = x/(1 - x - x^2)$ určete vytvořující funkci “poloviční” Fibonacciho posloupnosti (F_0, F_2, F_4, \dots) .*

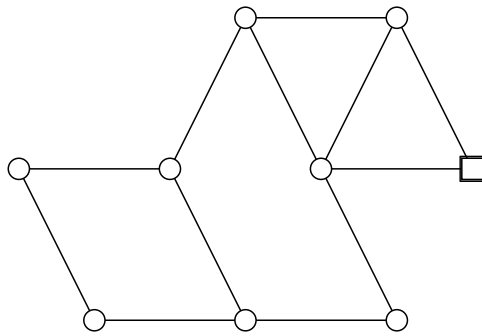
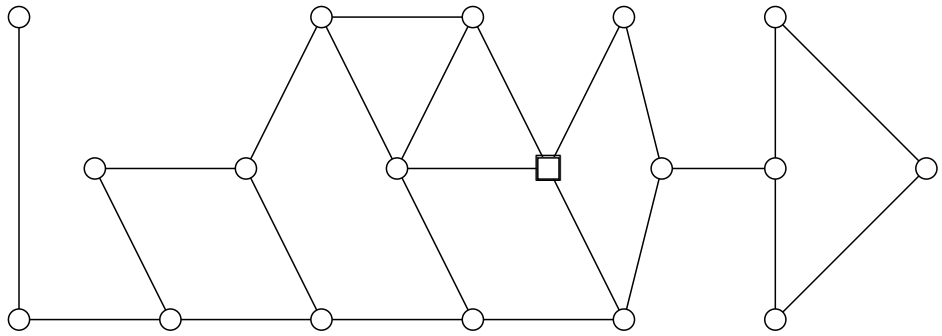
[Odpověď: $x/(1 - 3x + x^2)$]

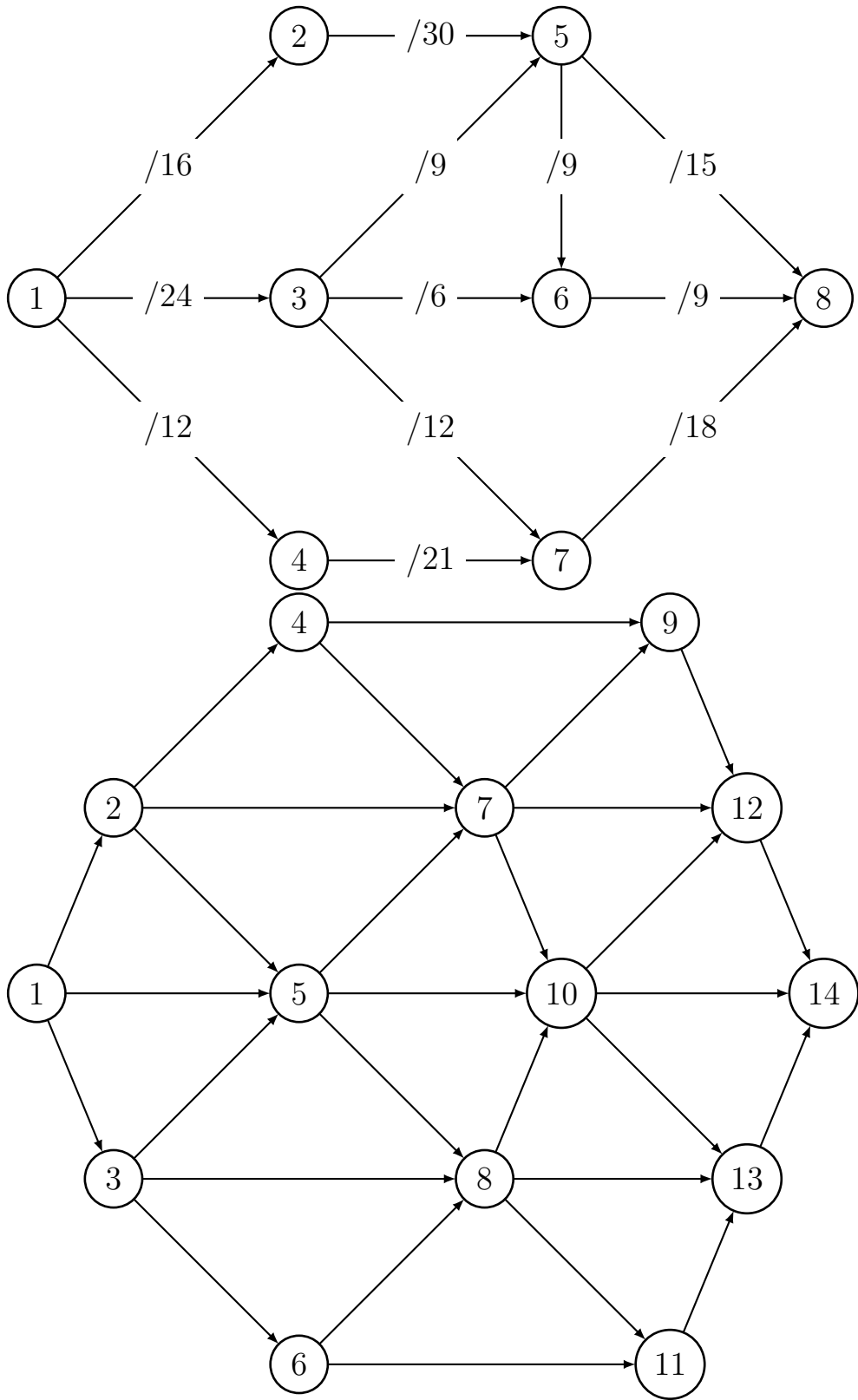
Příklad 79. *Řešte rekurenci*

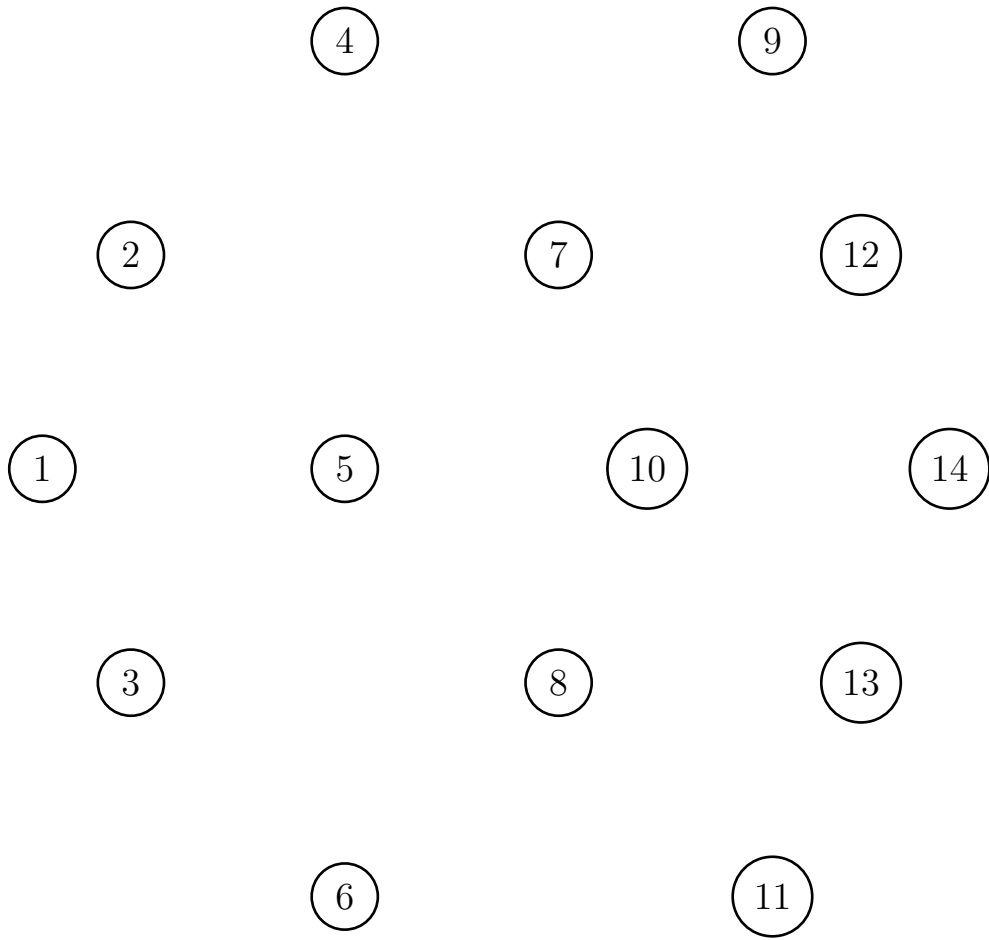
$$g_n = ng_{n-1}, g_0 = 1.$$

Příklad 80. Vějířem řádu n nazveme graf $n+1$ vrcholech $0, 1, \dots, n$, který má následujících $2n-1$ hran: vrchol 0 je spojen hranou s každým ze zbylých vrcholů a každý vrchol k je spojen hranou s vrcholem $k+1$ (pro $1 \leq k < n$). Kolik koster má takový graf?

[Návod: Uvažte vrchol n a jeho napojení na "zbytek" kostry. Rekurence je $f_n = f_{n-1} + f_{n-1} + f_{n-1} + f_{n-1} + \dots + f_1 + 1 = f_{n-1} + \sum_{k < n} f_k + [n > 0]$, odkud dostaneme $f_n = F_{2n}$.]







Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Pak zřejmě $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$