Matematika III – 12. přednáška
Vytvořující funkce

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

16. 12. 2009

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž `http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html`)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.

Plán přednášky

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o k míst (tj. vynechání prvních k míst posloupnosti) nejprve od $a(x)$ odečteme polynom $b_k(x)$ odpovídají posloupnosti $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$ a poté podělíme vytvořující funkci x^k.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o k míst (tj. vynechání prvních k míst posloupnosti) nejprve od $a(x)$ odečteme polynom $b_k(x)$ odpovídají posloupnosti $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$ a poté podělíme vytvořující funkci x^k.
- Substitucí polynomu $f(x)$ s nulovým absolutním členem za x vytvoříme specifické kombinace členů původní posloupnosti. Jednoduše je vyjádříme pro $f(x) = \alpha x$, což odpovídá vynásobení k–tého členu posloupnosti skalárem α^k. Dosazení $f(x) = x^n$ nám do posloupnosti mezi každé dva členy vloží $n - 1$ nul.

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrování: funkce $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$, pro $k \geq 1$ je člen s indexem k je $\frac{1}{k}a_{k-1}$ (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce $a(x)$).

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrování: funkce $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$, pro $k \geq 1$ je člen s indexem k je $\frac{1}{k}a_{k-1}$ (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce $a(x)$).
- Násobení řad: součin $a(x)b(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

  (tj. členy v součinu až po c_k jsou stejné jako v součinu $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots b_kx^k)$. Posloupnost c bývá také nazývána *konvolucí* posloupností a, b.

Přehled mocninných řad:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n,$$

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n},$$

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k.$$

Poznámka

- Poslední vzorec

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k$$

je tzv. **zobecněná binomická věta**, kde pro $r \in \mathbb{R}$ je binomický koeficient definován vztahem

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Speciálně klademe $\binom{r}{0} = 1$.

Poznámka

- Poslední vzorec

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k$$

je tzv. **zobecněná binomická věta**, kde pro $r \in \mathbb{R}$ je binomický koeficient definován vztahem

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Speciálně klademe $\binom{r}{0} = 1$.

- Pro $n \in \mathbb{N}$ z uvedeného vztahu snadno dostaneme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} x + \cdots + \binom{n+k-1}{n-1} x^k + \cdots .$$

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u x^{70} v součinu

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{30})(1+x+x^2+\cdots+x^{40})(1+x+x^2+\cdots+x^{70}).$$

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u x^{70} v součinu

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{30})(1+x+x^2+\cdots+x^{40})(1+x+x^2+\cdots+x^{70}).$$

Tento součin upravíme na tvar
$(1-x)^{-3}(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})$, odkud pomocí zobecněné binomické věty dostaneme

$$\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}x+\binom{4}{2}x^2+\cdots\right)(1-x^{31}-x^{41}-x^{51}+x^{72}+\ldots)$$

a tedy koeficientem u x^{70} je zřejmě
$\binom{70+2}{2}-\binom{70+2-31}{2}-\binom{70+2-41}{2}-\binom{70+2-51}{2}=1061.$

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice. Naším cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice. Našim cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, jinak 0.

Např. $[n = 1], [2|n]$ apod.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice. Našim cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, jinak 0.
Např. $[n = 1], [2|n]$ apod.
Pro vyjádření koeficientu u x^n ve vytvořující funkci $F(x)$ se pak často používá zápis $[x^n]F(x)$.

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Pak zřejmě $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Našim cílem je tedy odvodit vztah pro n-tý člen posloupnosti odpovídající vytvořující funkci $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Pak zřejmě $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Našim cílem je tedy odvodit vztah pro n-tý člen posloupnosti odpovídající vytvořující funkci $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.
Využijeme k tomu rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2},$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny polynomu $1 - x - x^2$ a A, B vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek.

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Pak zřejmě $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Našim cílem je tedy odvodit vztah pro n-tý člen posloupnosti odpovídající vytvořující funkci $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.
Využijeme k tomu rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2},$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny polynomu $1 - x - x^2$ a A, B vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek. Po substituci $\lambda_1 = 1/x_1, \lambda_2 = 1/x^2$ dostáváme vztah

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{a}{1 - \lambda_1 x} + \frac{b}{1 - \lambda_2 x},$$

odkud snadno pomocí znalostí o vytvořujících funkcích $F_n = a \cdot \lambda_1^n + b \cdot \lambda_2^n$

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.
Uvážíme-li navíc, že $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_n snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.
Uvážíme-li navíc, že $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_n snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$. Navíc je vidět, že $\lim_{n\to\infty} F_n/F_{n+1} = 1/\lambda_1 \approx 0.618$, což je poměr známý jako zlatý řez – objevuje se již od antiky v architektuře, výtvarném umění i hudbě.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.

Uvážíme-li navíc, že $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_n snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$. Navíc je vidět, že $\lim_{n\to\infty} F_n/F_{n+1} = 1/\lambda_1 \approx 0.618$, což je poměr známý jako zlatý řez – objevuje se již od antiky v architektuře, výtvarném umění i hudbě.

Analogický postup je možné použít při řešení obecných lineárních diferenčních rovnic k-tého stupně s konstatními koeficienty. Má-li charakteristická rovnice jednoduché kořeny, je situace jednodušší – viz dříve.

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.
Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.
4. Výsledné $A(x)$ se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u x^n udává a_n, tj. $a_n = [x^n]A(x)$.

Rozklad na parciální zlomky

Jak jsme již viděli na příkladu Fibonacciho posloupnosti, v kroku 4 často s výhodou využijeme **rozkladu na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve (často se používá při integraci racionálních lomených funkcí), proto připomeneme jen stručně:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde st $P <$ st Q (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.

Rozklad na parciální zlomky

Jak jsme již viděli na příkladu Fibonacciho posloupnosti, v kroku 4 často s výhodou využijeme **rozkladu na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve (často se používá při integraci racionálních lomených funkcí), proto připomeneme jen stručně:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde st $P <$ st Q (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.

Rozklad na parciální zlomky

Jak jsme již viděli na příkladu Fibonacciho posloupnosti, v kroku 4 často s výhodou využijeme **rozkladu na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve (často se používá při integraci racionálních lomených funkcí), proto připomeneme jen stručně:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde st $P <$ st Q (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \cdots + \frac{A_\ell}{x - \alpha_\ell}.$$

Rozklad na parciální zlomky

Jak jsme již viděli na příkladu Fibonacciho posloupnosti, v kroku 4 často s výhodou využijeme **rozkladu na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve (často se používá při integraci racionálních lomených funkcí), proto připomeneme jen stručně:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde st $P <$ st Q (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \dots + \frac{A_\ell}{x-\alpha_\ell}.$$

- Má-li kořen α násobnost k, pak jsou příslušné parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

Rozklad na parciální zlomky – pokr.

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele. (V našich úlohách ale někdy rozložíme i kvadratické faktory na lineární výpočtem kořenů v $\mathbb{C}$.)

Rozklad na parciální zlomky – pokr.

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele. (V našich úlohách ale někdy rozložíme i kvadratické faktory na lineární výpočtem kořenů v $\mathbb{C}$.)
- Neznámé dopočítáme buď roznásobením a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.

Rozklad na parciální zlomky – pokr.

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele. (V našich úlohách ale někdy rozložíme i kvadratické faktory na lineární výpočtem kořenů v $\mathbb{C}$.)
- Neznámé dopočítáme buď roznásobením a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.
- Výrazy $A/(x-\alpha)^k$ převedeme na výrazy tvaru $B/(1-\beta x)^k$ vydělením čitatele i jmenovatele výrazem $(-\alpha)^k$. Tento výraz již umíme rozvinout do mocninné řady.

Binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom*, *pravý binární podstrom*].

Binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom*, *pravý binární podstrom*]. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom*, *pravý binární podstrom*]. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro $n \geq 1$ vyhovuje b_n rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

Binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom*, *pravý binární podstrom*]. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro $n \geq 1$ vyhovuje b_n rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

Vidíme, že jde vlastně o konvoluci posloupností. Vztah upravíme, aby platil pro všechna $n \in N_0$:

$$b_n = \sum_{0 \leq k < n} b_k b_{n-k-1} + [n = 0].$$

Tím máme hotov krok 1.

V kroku 2 vynásobíme obě strany x^n a sečteme. Je-li $B(x)$ odpovídající vytvořující funkce, pak:

$$B(x) = \sum_n b_n x^n = \sum_{n,k} b_k b_{n-k-1} x^n + \sum_{n,k} [n = 0] x^n =$$

$$= \sum_k b_k x^k \left(\sum_n b_{n-k-1} x^{n-k} \right) + 1 =$$

$$= \sum_k b_k x^k (xB(x)) + 1 = B(x) \cdot xB(x) + 1.$$

V kroku 2 vynásobíme obě strany x^n a sečteme. Je-li $B(x)$ odpovídající vytvořující funkce, pak:

$$B(x) = \sum_n b_n x^n = \sum_{n,k} b_k b_{n-k-1} x^n + \sum_{n,k} [n=0] x^n =$$
$$= \sum_k b_k x^k \left(\sum_n b_{n-k-1} x^{n-k} \right) + 1 =$$
$$= \sum_k b_k x^k (xB(x)) + 1 = B(x) \cdot xB(x) + 1.$$

Pozorný čtenář si jistě povšiml, že ve výše uvedeném výpočtu jsme nahradili konvoluci $b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0$ vztahem $b_n = b_0 b_{n-1} + \cdots + b_{n-1} b_0 + b_n b_{-1} + b_{n+1} b_{-2} + \cdots$. Díky naší konvenci to ale není problém a velmi to usnadňuje práci se sumami (s nekonečnými součty se zde pracuje podstatně snadněji než s konečnými, kdy musíme neustále hlídat meze).

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici $B(x) = xB(x)^2 + 1$ pro $B(x)$:

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Znaménko $+$ ale nepřichází v úvahu, protože pak by pro $x \to 0_+$ $B(x)$ měla limitu ∞, zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu $b_0 = 1$.

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici $B(x) = xB(x)^2 + 1$ pro $B(x)$:

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Znaménko $+$ ale nepřichází v úvahu, protože pak by pro $x \to 0_+$ $B(x)$ měla limitu ∞, zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu $b_0 = 1$.
Zbývá už pouze krok 4, tedy rozvinout $B(x)$ do mocninné řady. Rozvoj získáme pomocí zobecněné binomické věty

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^k$$

a po vydělení $1 - \sqrt{1-4x}$ výrazem $2x$ dostaneme

$$B(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^{k-1} =$$

$$= \sum_{n \geq 0} \binom{-1/2}{n} \frac{(-4x)^n}{n+1} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}.$$

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*.

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet *monotónních* cest z $[0, 0]$ do $[n, n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet *monotónních* cest z $[0,0]$ do $[n,n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet různých triangulací konvexního $(n+2)$-úhelníku.

Ještě jeden příklad

Příklad

Vyřešte rekurenci

$$a_0 = a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$$

Ještě jeden příklad

Příklad

Vyřešte rekurenci

$$a_0 = a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$$

Řešení

Tato rekurence je opět jiného typu než dosud studované. Jako vždy neuškodí vypsání prvních několika členů posloupnosti (teď ale ani moc nepomůže, snad jen pro kontrolu správnosti výsledku).[a]

[a] Narozdíl od tvrzení v *Concrete mathematics* je již možné tuto posloupnost nalézt v *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.*

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1 - 2x)(1 + x)^2}.$$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.
- Krok 3:
$$A(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1-2x)(1+x)^2}.$$
- Krok 4: $a_n = \frac{7}{9}2^n + \left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\right)(-1)^n$.

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).
Najdeme rekurzívní vztah – diskusí chování "na kraji" zjistíme, že $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2}$, $r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$, $r_0 = 0, r_1 = 1$, kde r_n je počet pokrytí obdélníku $3 \times n$, ze kterého jsme odstranili levý horní roh.

Řešení (pokr.)

Hodnoty c_n a r_n pro několik malých n jsou:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
c_n	1	0	3	0	11	0	41	0
r_n	0	1	0	4	0	15	0	56

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = u_{n-1} + r_{n-2}.$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$.
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x)$.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n=0], \quad r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$.
- Krok 2: $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x)$.
- Krok 3:

$$C(x) = \frac{1-x^2}{1-4x^2+x^4}, \qquad R(x) = \frac{x}{1-4x^2+x^4}.$$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$.
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x)$.
- Krok 3:
$$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \qquad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$
- Krok 4: Vidíme, že obě funkce jsou funkcemi x^2, ušetříme si práci tím, že uvážíme funkci $D(z) = 1/(1 - 4z + z^2)$, pak totiž $C(x) = (1 - x^2)D(x^2)$, tj.
  $[x^{2n}]C(x) = [x^{2n}](1 - x^2)D(x^2) = [x^n](1 - x)D(x)$, a tedy $c_{2n} = d_n - d_{n-1}$.

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}.$$

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}.$$

Podobně jako u Fibonacciho posloupnosti je druhý sčítanec pro velká n zanedbatelný a pro všechna n leží mezi 0 a 1, proto

$$c_{2n} = \left\lceil \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} \right\rceil.$$

Např. $c_{20} = 413403$.

Plán přednášky

Exponenciální vytvořující funkce

Někdy mívá vytvořující funkce posloupnosti (a_n) komplikované vlastnosti, přičemž posloupnost $(a_n/n!)$ má vytvořující funkci daleko jednodušší. V takových případech raději pracujeme s tzv. **exponenciálními vytvořujícími funkcemi**

$$\widehat{A}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Jméno vychází z toho, že vytvořující funkcí *základní* posloupnosti $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ je e^x.

Exponenciální vytvořující funkce

Někdy mívá vytvořující funkce posloupnosti (a_n) komplikované vlastnosti, přičemž posloupnost $(a_n/n!)$ má vytvořující funkci daleko jednodušší. V takových případech raději pracujeme s tzv. **exponenciálními vytvořujícími funkcemi**

$$\widehat{A}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Jméno vychází z toho, že vytvořující funkcí *základní* posloupnosti $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ je e^x.
Zdůrazněme, že exponenciální vytvořující funkce se od obyčejných liší i standardními operacemi.

- Vynásobením x získáme funkci posloupnosti (na_{n-1}).

- Vynásobením x získáme funkci posloupnosti (na_{n-1}).
- Derivací získáme funkci odpovídající posunutí doleva.

- Vynásobením x získáme funkci posloupnosti (na_{n-1}).
- Derivací získáme funkci odpovídající posunutí doleva.
- Integrací získáme funkci odpovídající posunutí doprava.

- Vynásobením x získáme funkci posloupnosti (na_{n-1}).
- Derivací získáme funkci odpovídající posunutí doleva.
- Integrací získáme funkci odpovídající posunutí doprava.
- Součinem dvou funkcí $\widehat{F}(x)$ a $\widehat{G}(x)$ získáme funkci $\widehat{H}(x)$, která odpovídá posloupnosti $h_n = \sum_k \binom{n}{k} f_k g_{n-k}$, tzv. *binomické konvoluci* f_n a g_n.

Příklad

Řešte rekurenci danou vztahy $g_0 = 0, g_1 = 1$ a předpisem

$$g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k}.$$

Řešení

Vzhledem k rekurentnímu vztahu, který obsahuje binomickou konvoluci posloupností, se zdá vhodné využít *exponenciálních vytvořujících funkcí*. Označme $\widehat{G}(x)$ příslušnou exponenciální mocninnou řadu. Budeme postupovat v obvyklých čtyřech krocích.

Příklad

Řešte rekurenci danou vztahy $g_0 = 0, g_1 = 1$ a předpisem

$$g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k}.$$

Řešení

Vzhledem k rekurentnímu vztahu, který obsahuje binomickou konvoluci posloupností, se zdá vhodné využít *exponenciálních vytvořujících funkcí*. Označme $\widehat{G}(x)$ příslušnou exponenciální mocninnou řadu. Budeme postupovat v obvyklých čtyřech krocích.

- Krok 1: $g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k} + [n = 1]$.

Příklad

Řešte rekurenci danou vztahy $g_0 = 0, g_1 = 1$ a předpisem

$$g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k}.$$

Řešení

Vzhledem k rekurentnímu vztahu, který obsahuje binomickou konvoluci posloupností, se zdá vhodné využít *exponenciálních vytvořujících funkcí*. Označme $\widehat{G}(x)$ příslušnou exponenciální mocninnou řadu. Budeme postupovat v obvyklých čtyřech krocích.

- Krok 1: $g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k} + [n = 1]$.
- Krok 2: $\widehat{G}(x) = -2x\widehat{G}(x) + \widehat{G}(x)^2 + x$.

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce
$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$
- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme $\widehat{G}(x)$ do mocninné řady. S využitím vztahů

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme $\widehat{G}(x)$ do mocninné řady. S využitím vztahů

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1+4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1+4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme $\widehat{G}(x)$ do mocninné řady. S využitím vztahů

$$\binom{-1/2}{k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \binom{2k}{k}$$

a

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1+4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1+4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme $\widehat{G}(x)$ do mocninné řady. S využitím vztahů

$$\binom{-1/2}{k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \binom{2k}{k}$$

a

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1}{2k} \cdot \binom{-1/2}{k-1}$$

postupně dostaneme

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme $\widehat{G}(x)$ do mocninné řady. S využitím vztahů

$$\binom{-1/2}{k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \binom{2k}{k}$$

a

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1}{2k} \cdot \binom{-1/2}{k-1}$$

postupně dostaneme

Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

Odtud, protože

$$\sum_{n\geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} = \widehat{G}(x) = \frac{1+2x-\sqrt{1+4x^2}}{2},$$

máme $g_{2k+1} = 0$

Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

Odtud, protože

$$\sum_{n\geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} = \widehat{G}(x) = \frac{1+2x-\sqrt{1+4x^2}}{2},$$

máme $g_{2k+1} = 0$ a

$$g_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} \cdot (2k)! =$$

Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

Odtud, protože

$$\sum_{n\geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} = \widehat{G}(x) = \frac{1+2x-\sqrt{1+4x^2}}{2},$$

máme $g_{2k+1} = 0$ a

$$g_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} \cdot (2k)! = (-1)^k \cdot (2k)! \cdot C_{k-1},$$

kde C_n je n-té Catalanovo číslo.

Cayleyho formule

Připomeňme, že jsme již dříve dokázali, že počet stromů na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek ještě jednou pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.
Označme pro jednoduchost $t_n = \kappa(K_n)$. Již dříve jsme viděli, že $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 3$. Lze rovněž snadno spočítat $t_4 = 16$.

Cayleyho formule

Připomeňme, že jsme již dříve dokázali, že počet stromů na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek ještě jednou pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.

Označme pro jednoduchost $t_n = \kappa(K_n)$. Již dříve jsme viděli, že $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 3$. Lze rovněž snadno spočítat $t_4 = 16$.

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v a hrany s ním incidentní.

Cayleyho formule

Připomeňme, že jsme již dříve dokázali, že počet stromů na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek ještě jednou pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.

Označme pro jednoduchost $t_n = \kappa(K_n)$. Již dříve jsme viděli, že $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 3$. Lze rovněž snadno spočítat $t_4 = 16$.

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v a hrany s ním incidentní.

Pak pro $n > 1$

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \binom{n-1}{k_1,\ldots,k_m} k_1 \cdots k_m \cdot t_{k_1} \cdots t_{k_m}$$

Cayleyho formule

Připomeňme, že jsme již dříve dokázali, že počet stromů na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek ještě jednou pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.
Označme pro jednoduchost $t_n = \kappa(K_n)$. Již dříve jsme viděli, že $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 3$. Lze rovněž snadno spočítat $t_4 = 16$.
Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v a hrany s ním incidentní.
Pak pro $n > 1$

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \binom{n-1}{k_1, \ldots, k_m} k_1 \cdots k_m \cdot t_{k_1} \cdots t_{k_m}$$

Např. pro $n = 4$ máme $t_4 = 3t_3 + 6t_1t_2 + t_1^3$.

Ošklivě vypadající rekurenci zjednodušíme substitucí $u_n = nt_n$. Dostáváme pro $n > 1$

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{u_{k_m}}{k_m!}$$

a je vidět, že vnitřní sumu dostaneme jako koeficient u x^{n-1} v m-té mocnině řady $\widehat{U}(x) = \sum u_n \frac{x^n}{n!}$.

Ošklivě vypadající rekurenci zjednodušíme substitucí $u_n = nt_n$. Dostáváme pro $n > 1$

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{u_{k_m}}{k_m!}$$

a je vidět, že vnitřní sumu dostaneme jako koeficient u x^{n-1} v m-té mocnině řady $\widehat{U}(x) = \sum u_n \frac{x^n}{n!}$. Proto je

$$\frac{u_n}{n!} = [x^{n-1}] \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} \widehat{U}(x)^m,$$

a tedy

$$\widehat{U}(x) = x\, \mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}\,.$$

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk+1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k\geq 0} (tk+1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že $\mathcal{E}_0 = \mathrm{e}^x$, dále označujeme $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$.

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk+1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že $\mathcal{E}_0 = \mathrm{e}^x$, dále označujeme $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$.

Fakt: $\ln \mathcal{E}_t(x) = x \cdot \mathcal{E}_t(x)$, tj. spec. $\mathcal{E}(x) = \mathrm{e}^{x\mathcal{E}(x)}$.

Srovnáním tohoto vztahu s výše uvedeným $\widehat{U}(x) = x\,\mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}$ vidíme, že $\widehat{U}(x) = x\mathcal{E}(x)$.

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk+1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že $\mathcal{E}_0 = \mathrm{e}^x$, dále označujeme $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$.
Fakt: $\ln \mathcal{E}_t(x) = x \cdot \mathcal{E}_t(x)$, tj. spec. $\mathcal{E}(x) = \mathrm{e}^{x\mathcal{E}(x)}$.
Srovnáním tohoto vztahu s výše uvedeným $\widehat{U}(x) = x\,\mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}$ vidíme, že $\widehat{U}(x) = x\mathcal{E}(x)$.
Proto

$$t_n = \frac{u_n}{n} = \frac{n!}{n}[x^n]\widehat{U}(x) = (n-1)![x^{n-1}]\mathcal{E}(x) = n^{n-2}.$$

Plán přednášky

Definice

Pravděpodobnostní vytvořující funkcí náhodné veličiny X, která nabývá pouze nezáporné celočíselné hodnoty, nazveme funkci

$$G_X(z) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{pr}(X = k) z^k.$$

Definice

Pravděpodobnostní vytvořující funkcí náhodné veličiny X, která nabývá pouze nezáporné celočíselné hodnoty, nazveme funkci

$$G_X(z) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{pr}(X = k) z^k.$$

Z vlastností pravděpodobnosti je vidět, že $G_X(1) = 1$. Obráceně, libovolná mocninná řada $G(z)$ s nezápornými koeficienty, splňující $G(1) = 1$ je pravděpodobnostní mocninnou řadou nějaké náhodné veličiny.

Definice

Pravděpodobnostní vytvořující funkcí náhodné veličiny X, která nabývá pouze nezáporné celočíselné hodnoty, nazveme funkci

$$G_X(z) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{pr}(X = k) z^k.$$

Z vlastností pravděpodobnosti je vidět, že $G_X(1) = 1$. Obráceně, libovolná mocninná řada $G(z)$ s nezápornými koeficienty, splňující $G(1) = 1$ je pravděpodobnostní mocninnou řadou nějaké náhodné veličiny.

Mocninné řady nám velmi usnadňují výpočet charakteristik náhodných veličin, např. střední hodnoty a rozptylu.

$$E(X) = \sum_{k \geq 0} k \cdot \mathrm{pr}(X = k) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{pr}(X = k) \cdot k z^{k-1}|_{z=1} = G'_X(1).$$

Podobně pro rozptyl

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1)^2).$$

Podobně pro rozptyl

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1)^2).$$