

Matematika III – 5. přednáška  
Optimalizační metody, lineární programování,  
intergrace funkcí více proměnných

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

21. 10. 2009

# Obsah přednášky

- 1 Literatura
- 2 Speciální optimalizační metody
- 3 Lineární programování
- 4 Integrální počet více proměnných
  - Integrály závislé na parametru
  - Integrace funkcí více proměnných
  - Násobné integrály
  - Záměna souřadnic při integraci

# Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Speciální optimalizační metody
- 3 Lineární programování
- 4 Integrální počet více proměnných
  - Integrály závislé na parametru
  - Integrace funkcí více proměnných
  - Násobné integrály
  - Záměna souřadnic při integraci

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm>).

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm>).
- Ján Plesník, Jitka Dupačová, Milan Vlach, Lineárne programovanie, Alfa, 1990.

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm>).
- Ján Plesník, Jitka Dupačová, Milan Vlach, Lineárne programovanie, Alfa, 1990.
- Boris Pavlovič Děmidovič, Sběrka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003.



## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm>).
- Ján Plesník, Jitka Dupačová, Milan Vlach, Lineárne programovanie, Alfa, 1990.
- Boris Pavlovič Děmidovič, Sběrka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003.
- *Předmětové záložky v IS MU*

# Obsah první písemky – 29.10. v 17.00 (D1), resp. 18.00 (D3)

- určování limit, resp. důkaz neexistence

# Obsah první písemky – 29.10. v 17.00 (D1), resp. 18.00 (D3)

- určování limit, resp. důkaz neexistence
- výpočty parciálních a směrových derivací

# Obsah první písemky – 29.10. v 17.00 (D1), resp. 18.00 (D3)

- určování limit, resp. důkaz neexistence
- výpočty parciálních a směrových derivací
- použití diferenciálu – aproximace, tečná nadrovina

# Obsah první písemky – 29.10. v 17.00 (D1), resp. 18.00 (D3)

- určování limit, resp. důkaz neexistence
- výpočty parciálních a směrových derivací
- použití diferenciálu – aproximace, tečná nadrovina
- využití Taylorovy věty a Hessiánu pro aproximaci

# Obsah první písemky – 29.10. v 17.00 (D1), resp. 18.00 (D3)

- určování limit, resp. důkaz neexistence
- výpočty parciálních a směrových derivací
- použití diferenciálu – aproximace, tečná nadrovina
- využití Taylorovy věty a Hessiánu pro aproximaci
- Jacobián zobrazení a jeho inverze (včetně důkazu existence)

# Obsah první písemky – 29.10. v 17.00 (D1), resp. 18.00 (D3)

- určování limit, resp. důkaz neexistence
- výpočty parciálních a směrových derivací
- použití diferenciálu – aproximace, tečná nadrovina
- využití Taylorovy věty a Hessiánu pro aproximaci
- Jacobián zobrazení a jeho inverze (včetně důkazu existence)
- určování lokálních a globálních extrémů (vázané extrémy nikoliv).

# Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Speciální optimalizační metody
- 3 Lineární programování
- 4 Integrální počet více proměnných
  - Integrály závislé na parametru
  - Integrace funkcí více proměnných
  - Násobné integrály
  - Záměna souřadnic při integraci



# Speciální optimalizační metody

Zmiňme se jen ve stručnosti o speciálních optimalizačních technikách, které se v dnešní praxi používají. Zájemce o bližší seznámení s nimi můžeme odkázat na další předměty MU, např.:

- Optimalizace – PřF: M0160 (jaro)
- Optimalizace – PV027 (jaro)
- Lineární programování – PřF: M4110 (jaro)
- Matematické programování – PřF: M5170 (podzim)

# Metoda gradientu

Již dříve jsme zmínili, že funkce nejrychleji roste ve směru gradientu (a nejrychleji klesá ve směru opačném) – proto je přirozené se při hledání maxima vydat z daného bodu ve směru gradientu (analogie *chození do kopce nejprudším svahem*). Otázka je, jak dlouho „jít“ a jak často gradient počítat (podrobněji viz např. [http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient\\_descent](http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_descent)).  
Iterace:

$$x_{n+1} = x_n + \gamma_n \text{grad } f(x_n),$$

pro dostatečně malé  $\gamma_n$ , aby  $f(x_{n+1}) > f(x_n)$ .

# Metoda gradientu

Již dříve jsme zmínili, že funkce nejrychleji roste ve směru gradientu (a nejrychleji klesá ve směru opačném) – proto je přirozené se při hledání maxima vydat z daného bodu ve směru gradientu (analogie *chození do kopce nejprudším svahem*). Otázka je, jak dlouho „jít“ a jak často gradient počítat (podrobněji viz např. [http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient\\_descent](http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_descent)).

Iterace:

$$x_{n+1} = x_n + \gamma_n \text{grad } f(x_n),$$

pro dostatečně malé  $\gamma_n$ , aby  $f(x_{n+1}) > f(x_n)$ .

Problémy:

- náročný opakovaný výpočet  $\gamma$ ,
- velký počet iterací v případě velmi různorodé křivosti v různých směrech; např. *Rosenbrockova banánová funkce* –  $f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2$ .

# Newtonova optimalizační metoda

Newtonova metoda je dobře známý numerický postup pro nalezení kořenů dané reálné funkce  $f$ . Známe-li bod  $x_0$  „rozumně“ blízko kořene, zkonstruujeme v bodě  $[x_0, f(x_0)]$  tečnu ke grafu funkce  $f$  a za bod  $x_1$  zvolíme průsečík tečny s osou  $x$ . Tento postup opakujeme. Snadno je vidět, že platí rekurentní vztah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

# Newtonova optimalizační metoda

Newtonova metoda je dobře známý numerický postup pro nalezení kořenů dané reálné funkce  $f$ . Známe-li bod  $x_0$  „rozumně“ blízko kořene, zkonstruujeme v bodě  $[x_0, f(x_0)]$  tečnu ke grafu funkce  $f$  a za bod  $x_1$  zvolíme průsečík tečny s osou  $x$ . Tento postup opakujeme. Snadno je vidět, že platí rekurentní vztah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Tento postup např. poskytuje efektivní postup pro výpočet  $\sqrt{2}$  s libovolnou přesností; pokud bychom ale chtěli hledat řešení rovnice  $x^{1/3} = 0$ , tak snadno vidíme, že metoda diverguje, ať začneme jakkoli blízko 0.

Při hledání extrémů funkcí (i více proměnných) může být Newtona metoda využita pro nalezení stacionárních bodů – v nich musí být derivace nulová, proto jde vlastně o nalezení kořenů derivace iterativním postupem

$$x_{n+1} = x_n - (Hf(x_n))^{-1} \cdot \text{grad } f(x_n).$$

Při hledání extrémů funkcí (i více proměnných) může být Newtona metoda využita pro nalezení stacionárních bodů – v nich musí být derivace nulová, proto jde vlastně o nalezení kořenů derivace iterativním postupem

$$x_{n+1} = x_n - (Hf(x_n))^{-1} \cdot \text{grad } f(x_n).$$

Výpočet inverze Hessiánu je časově náročná operace, proto se často místo toho využívá

- metoda sdružených gradientů pro řešení příslušné soustavy,
- různých tzv. *kvazi-newtonovských* metod, využívajících pouze přibližného Hessiánu (např. BFGS) – viz např.

<http://demonstrations.wolfram.com/MinimizingTheRosenbrockFunction/>

# Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Speciální optimalizační metody
- 3 **Lineární programování**
- 4 Integrální počet více proměnných
  - Integrály závislé na parametru
  - Integrace funkcí více proměnných
  - Násobné integrály
  - Záměna souřadnic při integraci



# Lineární programování

## Úloha lineárního programování

Pro daná  $c \in \mathbb{R}^n$  řeší lineární programování úlohu optimalizovat (tj. maximalizovat nebo minimalizovat) lineární *účelovou funkci*

$$f(x) = c \cdot x = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

# Lineární programování

## Úloha lineárního programování

Pro daná  $c \in \mathbb{R}^n$  řeší lineární programování úlohu optimalizovat (tj. maximalizovat nebo minimalizovat) lineární *účelovou funkci*

$$f(x) = c \cdot x = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

za daných (lineárních) omezení

$$a_1 \cdot x \leq b_1$$

...

$$a_k \cdot x \leq b_k$$

$$a_{k+1} \cdot x = b_{k+1}$$

...

$$a_\ell \cdot x = b_\ell$$

# Lineární programování

Lze ukázat, že každou (rozumnou) úlohu lineárního programování lze převést na tzv. *kanonický tvar*

$$\text{maximalizovat } f(x) = c \cdot x$$

za podmínek

$$a_1 \cdot x \leq b_1$$

...

$$a_k \cdot x \leq b_k,$$

kde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ .

# Lineární programování

Lze ukázat, že každou (rozumnou) úlohu lineárního programování lze převést na tzv. *kanonický tvar*

$$\text{maximalizovat } f(x) = c \cdot x$$

za podmínek

$$a_1 \cdot x \leq b_1$$

...

$$a_k \cdot x \leq b_k,$$

kde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ .

Převody:

- minimalizace  $c \cdot x \rightarrow$  maximalizace  $(-c) \cdot x$
- nerovnice  $\leftrightarrow$  rovnice (doplňková proměnná, resp. nahrazení rovnice dvojicí nerovnic)
- reálná proměnná  $x \rightarrow$  nezáporné proměnné (substituce  $x = x^+ - x^-$ ,  $x^+ \geq 0, x^- \geq 0$ ).

# Grafické řešení úlohy lineárního programování

Úloha lineárního programování má pro 2 proměnné graficky názorný způsob řešení, vycházející z obdobného přístupu jako v případě vázaných extrémů.

# Grafické řešení úlohy lineárního programování

Úloha lineárního programování má pro 2 proměnné graficky názorný způsob řešení, vycházející z obdobného přístupu jako v případě vázaných extrémů.

V rovině si znázorníme množinu, vyhovující všem omezujícím podmínkám a pomocí vrstevnic účelové funkce najdeme bod(y) této množiny, kde nabývá účelová funkce extrémů.

# Grafické řešení úlohy lineárního programování

Úloha lineárního programování má pro 2 proměnné graficky názorný způsob řešení, vycházející z obdobného přístupu jako v případě vázaných extrémů.

V rovině si znázorníme množinu, vyhovující všem omezujícím podmínkám a pomocí vrstevnic účelové funkce najdeme bod(y) této množiny, kde nabývá účelová funkce extrémů.

Podrobněji ukážeme (spolu s řešením pomocí tzv. simplexové metody) s využitím appletu z <http://www.uni-leipzig.de/~wifaor/orschuhr/Simplex/InitOSI.html>.

# Simplexová metoda

Standardní úlohu řeší klasická Simplexová metoda (George Dantzig, 1947).



# Simplexová metoda

Standardní úlohu řeší klasická Simplexová metoda (George Dantzig, 1947).

Úvodní fáze spočívá v nalezení nějakého vrcholu na polytopu (zobecnění polyedru na více dimenzí), který je tvořen body vyhovujícími podmínkám. V dalších krocích postupuje po hranách do vrcholů s vyšší hodnotou účelové funkce.

# Simplexová metoda

Standardní úlohu řeší klasická Simplexová metoda (George Dantzig, 1947).

Úvodní fáze spočívá v nalezení nějakého vrcholu na polytopu (zobecnění polyedru na více dimenzí), který je tvořen body vyhovujícími podmínkám. V dalších krocích postupuje po hranách do vrcholů s vyšší hodnotou účelové funkce.

Sice je ukázán příklad podmínek, kdy simplexová metoda projde nešikovně všech  $2^n$  vrcholů (jde o příklad zborcené  $n$ -rozměrné krychle), a tedy metoda je v nejhorším případě exponenciální, ale v praxi je obvykle pozoruhodně úspěšná (kolem roku 2000 bylo dokázáno, že očekávaný čas běhu na náhodném vstupu je polynomiální).

## Příklad

Maximalizujte  $f = 2x - 3y + 4z$  za podmínek

$$4x - 3y + z \leq 3$$

$$x + y + z \leq 10$$

$$2x + y - z \leq 10$$

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

## Řešení

Převédeme úlohu z kanonického do *standardního* tvaru – k tomu stačí zavést doplňkové proměnné  $u, v, w$ . Maximalizujeme

$$4x - 3y \quad +z + u \quad = 3$$

$$x + y \quad +z \quad +v \quad = 10$$

$$2x + y \quad -z \quad +w \quad = 10$$

---


$$-2x + 3y \quad -4z \quad +f = 0$$

## Řešení (pokračování)

Úlohu přepíšeme do tzv. *simplexové tabulky*.

	$x$	$y$	$z$	$u$	$v$	$w$		
$u$	4	-3	1	1	0	0		3
$v$	1	1	1	0	1	0		10
$w$	2	1	-1	0	0	1		10
$f$	-2	3	-4	0	0	0		0

V posledním řádku odpovídajícím účelové funkci najdeme **některou zápornou hodnotu** (*heuristika: největší v abs. hodnotě*), což odpovídá tomu, že se snažíme postupovat po hraně ve směru proměnné odpovídající příslušnému sloupci. Krajní vrchol této hrany najdeme tak, že najdeme minimum z podílů  $3/1$ ,  $10/1$  absolutních členů a **kladných** koeficientů u proměnné, v jejímž směru se snažíme postupovat. V našem případě půjde o sloupec proměnné  $z$  a eliminovat budeme pomocí 1. řádku („pivot“ je 1). Tento řádek označíme stejně jako dotyčný sloupec (*proměnná přeide do báze*)

## Řešení (pokračování)

$z$	$4$	$-3$	$1$	$1$	$0$	$0$	$3$
$v$	$-3$	$4$	$0$	$-1$	$1$	$0$	$7$
$w$	$6$	$-2$	$0$	$1$	$0$	$1$	$13$
$f$	$14$	$-9$	$0$	$4$	$0$	$0$	$12$

Nyní máme jediný záporný prvek v posledním řádku (sloupec  $y$ ) a v něm jediný kladný prvek, proto pivotujeme podle 4 ve 2. řádku.

## Řešení (dokončení)

	$x$	$y$	$z$	$u$	$v$	$w$	
$z$	$\frac{7}{4}$	$0$	$1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$0$	$\frac{33}{4}$
$y$	$-\frac{3}{4}$	$1$	$0$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$0$	$\frac{7}{4}$
$w$	$\frac{9}{2}$	$0$	$0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1$	$\frac{33}{2}$
$f$	$\frac{29}{4}$	$0$	$0$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	$1$	$\frac{111}{4}$

Nyní již máme všechny prvky v posledním řádku kladné, dosáhli jsme tedy maxima

$$f = \frac{111}{4}$$

pro  $z = \frac{33}{4}$ ,  $y = \frac{7}{4}$  a  $w = \frac{33}{2}$ . Původní proměnná  $x$  je nyní nebazická ( $x$  není uvedeno jako označení žádného řádku nebo ekvivalentně: sloupec  $x$  není eliminovaný), což odpovídá  $x = 0$ .

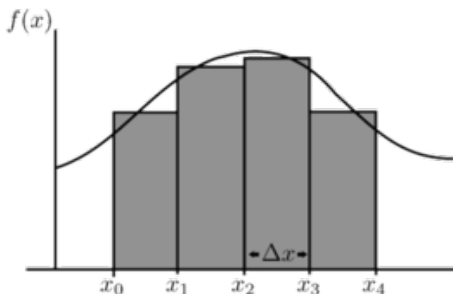
# Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Speciální optimalizační metody
- 3 Lineární programování
- 4 Integrální počet více proměnných**
  - Integrály závislé na parametru
  - Integrace funkcí více proměnných
  - Násobné integrály
  - Záměna souřadnic při integraci

# Připomenutí: Riemannův integrál

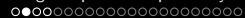
**Motivace:** výpočet plochy mezi grafem funkce  $f(x)$  a osou  $x$  na uzavřeném intervalu.

Funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jedné proměnné ohraničená na uzavřeném intervalu  $[a, b]$ .









Zvolíme dělení  $D = \{x_1 = a, \dots, x_n = b\}$  intervalu  $[a, b]$  a hledaný integrál (tj. *plochu pod grafem*) aproximujeme součtem

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

kde  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$  je libovolný. (Součet ploch obdélníků pod křivkou).

Je-li *norma dělení* (tj. maximum z délek intervalů  $[x_i, x_{i+1}]$ ) *malá*, pak výše uvedená suma je velmi blízko zmíněné ploše (přesněji pomocí nulové posloupnosti dělení a limit).

# Připomenutí: Riemannův integrál

**Vlastnosti:** Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu  $[a, b]$  tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

# Připomenutí: Riemannův integrál

**Vlastnosti:** Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu  $[a, b]$  tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

**Aplikace:**

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí  $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ ,

# Připomenutí: Riemannův integrál

**Vlastnosti:** Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu  $[a, b]$  tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

**Aplikace:**

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí  $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ ,
- délka křivky zadané parametricky  $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$ ,

# Připomenutí: Riemannův integrál

**Vlastnosti:** Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu  $[a, b]$  tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

**Aplikace:**

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí  $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ ,
- délka křivky zadané parametricky  $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$ ,
- objem rotačního tělesa  $\pi \int_a^b f^2(x) dx$ ,

# Připomenutí: Riemannův integrál

**Vlastnosti:** Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu  $[a, b]$  tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

**Aplikace:**

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí  $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ ,
- délka křivky zadané parametricky  $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$ ,
- objem rotačního tělesa  $\pi \int_a^b f^2(x) dx$ ,
- povrch pláště rotačního tělesa  $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ .

# Integrály závislé na parametru

Jestliže integrujeme podle jedné proměnné  $x$  funkci  $n + 1$  proměnných  $f(x, y_1, \dots, y_n)$ , potom výsledek bude funkcí  $F(y_1, \dots, y_n)$  ve zbývajících  $n$  proměnných.



# Integrály závislé na parametru

Jestliže integrujeme podle jedné proměnné  $x$  funkci  $n + 1$  proměnných  $f(x, y_1, \dots, y_n)$ , potom výsledek bude funkcí  $F(y_1, \dots, y_n)$  ve zbývajících  $n$  proměnných.

## Věta (O záměně derivace a integrálu)

*Pro spojitě diferencovatelnou funkci  $f(x, y_1, \dots, y_n)$  definovanou pro  $x$  z konečného intervalu  $[\alpha, \beta]$  a na nějakém okolí bodu  $a = [a_1, \dots, a_n] \in E_n$  uvažujme integrál*

$$F(y_1, \dots, y_n) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y_1, \dots, y_n) dx.$$

*Potom platí pro všechny indexy  $j = 1, \dots, n$*

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(a) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, a_1, \dots, a_n) dx.$$

## Integrace funkcí více proměnných

Obdobně jako v případě jedné proměnné můžeme potřebu zavedení integrálu více proměnných motivovat výpočtem objemu trojrozměrného prostoru pod grafem funkce  $z = f(x, y)$  dvou proměnných.

Místo výběru malých intervalů  $[x_i, x_{i+1}]$  dělících celý interval, přes který integrujeme, a přiblížením příslušné části objemu ploškou obdélníku s výškou danou hodnotou funkce  $f$  v reprezentantu tohoto intervalu  $\xi_i$ , tj. výrazem

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

budeme pracovat s děleními v obou proměnných a hodnotami reprezentujícími výšku grafu nad tímto obdélníčkem v rovině.

# Integrace funkcí více proměnných

Obdobně jako v případě jedné proměnné můžeme potřebu zavedení integrálu více proměnných motivovat výpočtem objemu trojrozměrného prostoru pod grafem funkce  $z = f(x, y)$  dvou proměnných.

Místo výběru malých intervalů  $[x_i, x_{i+1}]$  dělících celý interval, přes který integrujeme, a přiblížením příslušné části objemu ploškou obdélníku s výškou danou hodnotou funkce  $f$  v reprezentantu tohoto intervalu  $\xi_i$ , tj. výrazem

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

budeme pracovat s děleními v obou proměnných a hodnotami reprezentujícími výšku grafu nad tímto obdélníčkem v rovině.

Co jsou obory integrace?

Nejjednodušším přístupem je uvažovat pouze obory integrace  $S$ , které jsou dány jako součiny intervalů, tj. jsou zadány rozsahem  $x \in [a, b]$  a  $y \in [c, d]$ .

Hovoříme v této souvislosti o **vícerozměrném intervalu**. 

Pokud je  $S$  jiná ohraničená množina v  $\mathbb{R}^2$ , pracujeme místo ní s dostatečně velikou oblastí  $[a, b] \times [c, d]$ , ale upravíme naši funkci tak, že  $f(x, y) = 0$  pro všechny body mimo  $S$ .

Definice Riemannova integrálu věrně sleduje náš postup pro jednu proměnnou.

Pokud je  $S$  jiná ohraničená množina v  $\mathbb{R}^2$ , pracujeme místo ní s dostatečně velikou oblastí  $[a, b] \times [c, d]$ , ale upravíme naši funkci tak, že  $f(x, y) = 0$  pro všechny body mimo  $S$ .

Definice Riemannova integrálu věrně sleduje náš postup pro jednu proměnnou.

Integrál existuje, jestliže pro každou volbu posloupnosti dělení  $\Xi$  (nyní ve všech proměnných zároveň) a reprezentantů jednotlivých krychliček

$$\xi_{i,\dots,j} \in [x_i, x_{i+1}] \times \dots \times [z_j, z_{j+1}] \subset \mathbb{R}^n,$$

s maximální velikostí mezi všemi použitými intervaly jdoucí k nule, budou integrální součty

$$S_{\Xi,\xi} = \sum_{i,\dots,j} f(\xi_{i,\dots,j})(x_{i+1} - x_i) \dots (z_{j+1} - z_j).$$

konvergovat k jedné hodnotě, kterou zapisujeme

$$\int_S f(x, \dots, z) dx \dots dz$$

Pro všechny spojité funkce  $f$  lze opět dokázat existenci Riemannova integrálu a tento výsledek lze snadno rozšířit pro *dostatečně spojité* funkce na *dostatečně rozumných* oborech integrace.

Pro všechny spojité funkce  $f$  lze opět dokázat existenci Riemannova integrálu a tento výsledek lze snadno rozšířit pro *dostatečně spojité* funkce na *dostatečně rozumných* oborech integrace.

### Definice

Omezenou množinu  $S \subset E_n$  označujeme za **Riemannovsky měřitelnou**, jestliže je její charakteristická funkce, definovaná  $\chi(x) = 1$  pro  $x \in S$  a  $\chi(x) = 0$  jinak, Riemannovsky integrovatelná.

Definice Riemannova integrálu sice nedává rozumný návod, jak hodnoty integrálů skutečně vypočítat (kromě využití výpočetní techniky, kdy je přímé použití definice na místě), okamžitě ale vede k základním vlastnostem Riemannova integrálu (srovnejte s vlastnostmi integrálu v jedné proměnné):



Definice Riemannova integrálu sice nedává rozumný návod, jak hodnoty integrálů skutečně vypočítat (kromě využití výpočetní techniky, kdy je přímé použití definice na místě), okamžitě ale vede k základním vlastnostem Riemannova integrálu (srovnejte s vlastnostmi integrálu v jedné proměnné):

### Věta

*Množina Riemannovsky integrovatelných funkcí na vícerozměrném intervalu  $S \subset E_n$  je vektorovým prostorem a Riemannův integrál je na něm lineární formou.*

*Pokud je obor integrace  $S$  zadán jako disjunktní sjednocení konečně mnoha Riemannovsky měřitelných oborů  $S_i$ , je integrál funkce  $f$  přes  $S$  dán součtem integrálů přes obory  $S_i$ .*

## Příklad

Vypočtěte dvojný integrál

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} xy \, dx dy$$

jako limitu integrálního součtu.

## Příklad

Vypočtete dvojný integrál

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} xy \, dx dy$$

jako limitu integrálního součtu.

## Řešení

Za nulovou posloupnost dělení uvážíme posloupnost  $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ , kde  $n$ -té dělení dostaneme pomocí přímků  $x = i/n, y = j/n$  pro  $i, j = 1, 2, \dots, n-1$ , přičemž hodnoty  $\xi_{i,j}$  budeme vybírat z pravých horních rohů dělicích čtverečků.

## Řešení (dokončení)

Pak

$$\begin{aligned}\int_{[0,1] \times [0,1]} xy \, dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq i, j < n} \frac{(i+1)}{n} \frac{(j+1)}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \left( \sum_{1 \leq i \leq n} i \right) \left( \sum_{1 \leq j \leq n} j \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

# Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze  $S$  definovat pomocí spojitě funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici  $x$  umíme zadat dvěma funkcemi rozsah další souřadnice  $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$ , poté rozsah další souřadnice  $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$  atd. (Zejména tedy i případy, kdy jsou funkce  $\varphi, \psi, \eta, \zeta$  konstantní.)

# Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze  $S$  definovat pomocí spojitě funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici  $x$  umíme zadat dvěma funkcemi rozsah další souřadnice  $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$ , poté rozsah další souřadnice  $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$  atd. (Zejména tedy i případy, kdy jsou funkce  $\varphi, \psi, \eta, \zeta$  konstantní.)

## Věta

*V případě množiny  $S$  zadané jako výše a Riemannovsky integrovatelné funkce  $f$  na  $S$  je Riemannův integrál vyčíslen formulí*

$$\int_S f(x, y, \dots, z) dx \dots dz = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \dots \left( \int_{\eta(x, y, \dots)}^{\zeta(x, y, \dots)} f(x, y, \dots, z) dz \right) \dots dy \right) dx$$

Přímým důsledkem pro konstatní funkce je:

### Věta

*Pro vícerozměrný interval  $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  a spojitou funkci  $f(x_1, \dots, x_n)$  na  $S$  je násobný integrál*

$$\begin{aligned} \int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \dots \left( \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n \end{aligned}$$

*nezávislý na pořadí, ve kterém postupně integraci provádíme.*

## Příklad (nezávislé meze integrace)

Vypočtěte dvojný integrál

$$I = \int_{[0,1] \times [0,3]} 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2 \, dx dy.$$



## Příklad (nezávislé meze integrace)

Vypočtete dvojný integrál

$$I = \int_{[0,1] \times [0,3]} 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2 \, dx dy.$$

## Řešení

S využitím předchozí věty dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \left( \int_0^1 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2 \, dx \right) dy = \\ &= \int_0^3 [(x-1)^3 + x(y-2)^2 + 2x]_{x=0}^1 dy \\ &= \int_0^3 (y-2)^2 + 3 \, dy = \left[ \frac{1}{3}(y-2)^3 + 3y \right]_0^3 = 12 \end{aligned}$$

Stejný výsledek dostaneme i při integraci v opačném pořadí.

## Příklad (závislé meze integrace)

Vypočtěte integrál

$$I = \int_S xy^2 \, dx dy,$$

kde  $S$  je plocha v 1. kvadrantu  $E_2$  ohraničená grafy funkcí  $y = x$  a  $y = x^2$ .

## Příklad (závislé meze integrace)

Vypočtete integrál

$$I = \int_S xy^2 \, dx dy,$$

kde  $S$  je plocha v 1. kvadrantu  $E_2$  ohraničená grafy funkcí  $y = x$  a  $y = x^2$ .

## Řešení

Snadno je vidět, že grafy se protínají v bodech  $[0, 0]$  a  $[1, 1]$ , přičemž pro  $x \in [0, 1]$  je  $x^2 \leq x$ .

## Příklad (závislé meze integrace)

Vypočtete integrál

$$I = \int_S xy^2 dx dy,$$

kde  $S$  je plocha v 1. kvadrantu  $E_2$  ohraničená grafy funkcí  $y = x$  a  $y = x^2$ .

## Řešení

Snadno je vidět, že grafy se protínají v bodech  $[0, 0]$  a  $[1, 1]$ , přičemž pro  $x \in [0, 1]$  je  $x^2 \leq x$ . Proto je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( \int_{x^2}^x xy^2 dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 [xy^3]_{y=x^2}^x dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^4 - x^7) dx = \frac{1}{3} \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{40}. \end{aligned}$$

# Záměna souřadnic při integraci

Při výpočtu integrálů funkcí jedné proměnné jsme používali transformace souřadnic jako mimořádně silný nástroj. Obdobně lze transformace využívat pro integrály funkcí více proměnných. Připomeňme nejdříve, jak je to s transformacemi pro jednu proměnnou:

# Záměna souřadnic při integraci

Při výpočtu integrálů funkcí jedné proměnné jsme používali transformace souřadnic jako mimořádně silný nástroj.

Obdobně lze transformace využívat pro integrály funkcí více proměnných. Připomeňme nejdříve, jak je to s transformacemi pro jednu proměnnou: Integrovaný výraz  $f(x)dx$  vyjadřuje plochu obdélníčku určeného (linearizovaným) přírůstkem proměnné  $x$  a hodnotou  $f(x)$ . Pokud proměnnou transformujeme vztahem  $x = u(t)$ , vyjadřuje se i linearizovaný přírůstek jako

$$dx = \frac{du}{dt} dt$$

a proto i příslušný příspěvek pro integrál je vyjádřen jako

$$f(u(t)) \frac{du}{dt} dt,$$

přičemž buď předpokládáme, že znaménko derivace  $u'(t)$  je kladné, nebo dojde k obrácení mezí integrálu, takže ve výsledku se znaménko neprojeví.

Intuitivně je postup v  $n$  proměnných docela podobný, pouze musíme použít znalostí z lineární algebry o objemu rovnoběžnostěnů

([http://en.wikipedia.org/wiki/Integration\\_by\\_substitution#Substitution\\_for\\_multiple\\_variables](http://en.wikipedia.org/wiki/Integration_by_substitution#Substitution_for_multiple_variables)).

Intuitivně je postup v  $n$  proměnných docela podobný, pouze musíme použít znalostí z lineární algebry o objemu rovnoběžnostěnů

([http://en.wikipedia.org/wiki/Integration\\_by\\_substitution#Substitution\\_for\\_multiple\\_variables](http://en.wikipedia.org/wiki/Integration_by_substitution#Substitution_for_multiple_variables)).

### Věta

*Nechť  $G(t_1, \dots, t_n) : E_n \rightarrow E_n$ ,  $[x_1, \dots, x_n] = G(t_1, \dots, t_n)$ , je spojitě diferencovatelné zobrazení,  $T$  a  $S = G(T)$  jsou Riemannovsky měřitelné množiny a  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá funkce. Potom platí*

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_T f(G(t_1, \dots, t_n)) |\det(D^1 G(t_1, \dots, t_n))| dt_1 \dots dt_n.$$

Podrobný formální důkaz nebudeme uvádět, je však přímočarou realizací výše uvedené úvahy ve spojení s definicí Riemannova integrálu



Abychom si přiblížili obsah tvrzení poslední věty, uvedeme jeho speciální případ pro integrál funkce  $f(x, y)$  ve dvou proměnných a transformaci

$$G(s, t) = (g(s, t), h(s, t)).$$

Dostáváme

$$\int_{G(T)} f(x, y) dx dy = \int_T f(g(s, t), h(s, t)) \left| \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right| ds dt.$$

Abychom si přiblížili obsah tvrzení poslední věty, uvedeme jeho speciální případ pro integrál funkce  $f(x, y)$  ve dvou proměnných a transformaci

$$G(s, t) = (g(s, t), h(s, t)).$$

Dostáváme

$$\int_{G(T)} f(x, y) dx dy = \int_T f(g(s, t), h(s, t)) \left| \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right| ds dt.$$

Konkrétně: spočtíme integrál z charakteristické funkce kruhu o poloměru  $R$  (tj. jeho obsah) definovaného v polárních souřadnicích.

Abychom si přiblížili obsah tvrzení poslední věty, uvedeme jeho speciální případ pro integrál funkce  $f(x, y)$  ve dvou proměnných a transformaci

$$G(s, t) = (g(s, t), h(s, t)).$$

Dostáváme

$$\int_{G(T)} f(x, y) dx dy = \int_T f(g(s, t), h(s, t)) \left| \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right| ds dt.$$

Konkrétně: spočtíme integrál z charakteristické funkce kruhu o poloměru  $R$  (tj. jeho obsah) definovaného v polárních souřadnicích. Nejprve spočítáme Jacobiho matici transformace  $x = r \cos \varphi$ ,  
 $y = r \sin \varphi$

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Proto je determinant z této matice roven

$$\det D^1 G(r, \varphi) = r(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = r.$$

Můžeme tedy přímo počítat pro kružnici  $S$  o poloměru  $R$ , která je obrazem obdélníku  $(r, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi] = T$ :

$$\int_S dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2.$$

## Příklad (využití polárních souřadnic)

Zjednodušte dvojný integrál

$$I = \int_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy$$

na jednoduchý přechodem k polárním souřadnicím.

## Příklad (využití polárních souřadnic)

Zjednodušte dvojný integrál

$$I = \int_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy$$

na jednoduchý přechodem k polárním souřadnicím.

## Řešení

Z předchozího víme, že při transformaci  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  je determinant Jacobiho matice roven  $r$ . Proto

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 f(r) \cdot r \, dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^1 f(r) \cdot r \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = 2\pi \int_0^1 f(r) \cdot r \, dr. \end{aligned}$$

# Časté transformace souřadnic v $E_3$

([http://en.wikipedia.org/wiki/Multiple\\_integral#Change\\_of\\_variables](http://en.wikipedia.org/wiki/Multiple_integral#Change_of_variables))

# Časté transformace souřadnic v $E_3$

([http://en.wikipedia.org/wiki/Multiple\\_integral#Change\\_of\\_variables](http://en.wikipedia.org/wiki/Multiple_integral#Change_of_variables))

**Válcové souřadnice** Zobrazení

$G : \{[r, \varphi, z]; r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$



# Časté transformace souřadnic v $E_3$

([http://en.wikipedia.org/wiki/Multiple\\_integral#Change\\_of\\_variables](http://en.wikipedia.org/wiki/Multiple_integral#Change_of_variables))

**Válcové souřadnice** Zobrazení

$G : \{[r, \varphi, z]; r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

a tedy

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Časté transformace souřadnic v $E_3$

([http://en.wikipedia.org/wiki/Multiple\\_integral#Change\\_of\\_variables](http://en.wikipedia.org/wiki/Multiple_integral#Change_of_variables))

**Válcové souřadnice** Zobrazení

$G : \{[r, \varphi, z]; r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

a tedy

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proto je  $\det D^1 G = r$ .

# Časté transformace souřadnic v $E_3$

**Sférické souřadnice** Zobrazení

$G : \{[r, \theta, \varphi]; r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

# Časté transformace souřadnic v $E_3$

**Sférické souřadnice** Zobrazení

$G : \{[r, \theta, \varphi]; r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

a tedy

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

# Časté transformace souřadnic v $E_3$

**Sférické souřadnice** Zobrazení

$G : \{[r, \theta, \varphi]; r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

a tedy

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Proto je

$$\begin{aligned} \det D^1 G &= r^2 \sin^3 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + \\ &+ r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi = \\ &= r^2 \sin^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

## Příklad

Vypočtěte integrál

$$I = \int_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz,$$

kde množina  $V$  je vymezena plochou  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ .

## Příklad

Vypočtěte integrál

$$I = \int_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz,$$

kde množina  $V$  je vymezena plochou  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ .

## Řešení

Transformací do sférických souřadnic dostáváme (grafem plochy je koule se středem v  $[0, 0, 1/2]$  a poloměrem  $1/2$ ) – promyslete meze!

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} r \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \dots = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$