
Matematika III

29. října 2009

A Jméno:
UČO:

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.

Maximum je 5 bodů.

Na práci máte 90 minut.

Příklady:

- (1b.) K elipsoidu o rovnici $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ veďte tečné roviny rovnoběžné s rovinou o rovnici $x - y + 2z = 0$.
- (1b.) Pomocí diferenciálu odhadněte (bez použití kalkulačky) hodnotu

$$\operatorname{arctg} \frac{1,02}{0,95}.$$

- (1b.) Rozhodněte, zda je zobrazení $F : (x, y) \mapsto (xy, x/y)$ prosté v okolí bodu $[2, 1]$. Pokud ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $F(2, 1)$.
- (2b.) Najděte globální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + 2$$

na množině M ohraničené funkcemi $y = 2, y = |x|$. Rozhodněte o jaký typ extrému se jedná.

Matematika III

29. října 2009

B Jméno:
UČO:

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.

Maximum je 5 bodů.

Na práci máte 90 minut.

Příklady:

- (1b.) Na kuželosečce o rovnici

$$x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$$

najděte všechny body, v nichž je normála rovnoběžná s osou y . Pro každý nalezený bod zapište obecnou rovnici tečny k dané křivce v tomto bodě.

- (1b.) Vypočtete diferenciál funkce $f(x, y, z) = 2^x \sin y \operatorname{arctg} z$ v bodě $[-4, \frac{\pi}{2}, 0]$ pro $dx = 0,05$, $dy = 0,06$ a $dz = 0,08$.
- (1b.) Dokažte, že funkce $f(x, y) = \frac{-y}{x^2 - y}$ nemá limitu v bodě $(0, 0)$.
- (2b.) Určete všechny lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ ležící v prvním oktantu a určete jejich typ.

Matematika III

29. října 2009

C Jméno:
UČO:

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.

Maximum je 5 bodů.

Na práci máte 90 minut.

Příklady:

1. (1,5b.) Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[1, 1]$ ve směru vektoru $(-1, 3)$

- (a) přímo z definice,
(b) pomocí gradientu.

2. (1b.) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce $\frac{\cos x}{\cos y}$ se středem v bodě $[0, 0]$.

3. (1b.) Ve kterých bodech jednodílného hyperboloidu o rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

nelze vyjádřit z jako funkci $z = f(x, y)$?

4. (1,5 b.) Najděte stacionární body funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$$

a zjistěte, zda jsou v těchto bodech lokální extrém.

Matematika III

29. října 2009

D Jméno:
UČO:

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.

Maximum je 5 bodů.

Na práci máte 90 minut.

Příklady:

1. (1,5b.) Vypočtěte směrovou derivaci funkce

$$f(x, y, z) = z - e^x \sin y$$

v bodě $[\ln 3, 3\pi/2, -3]$ ve směru vektoru $(1, 2, 2)$

- (a) přímo z definice,
(b) pomocí gradientu.

2. (1,5b.) Nechť je funkce $y = y(x)$ dána v okolí bodu $[1, 1]$ implicitně rovnicí $y^3 - 2xy + x^2 = 0$. Určete Taylorův polynom 2. stupně této funkce v bodě $x_0 = 1$.

3. (1b.) Pomocí diferenciálu funkce dvou proměnných vypočtěte (bez kalkulačky) přibližně $\ln(0,97^2 + 0,05^2)$.

4. (1b.) Rozhodněte, zda je zobrazení $F : (x, y) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, xy)$ prosté v okolí bodu $[0, 1]$. Pokud ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $F(0, 1)$.