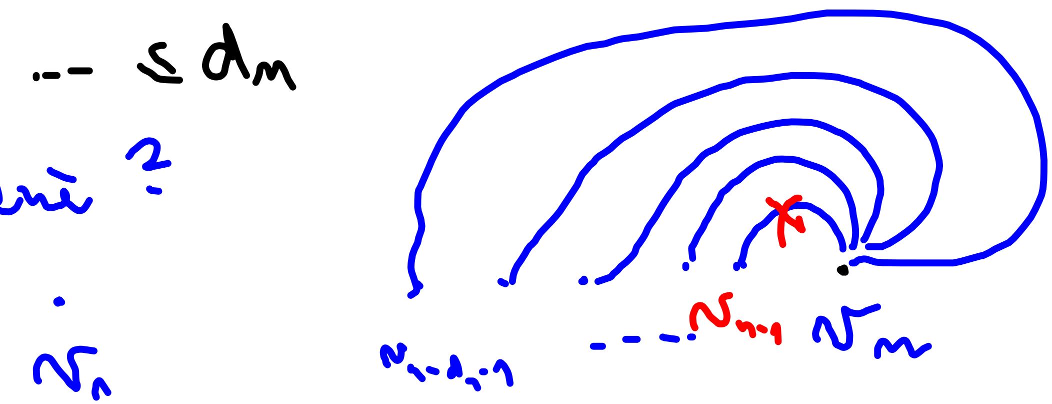
„$\Leftarrow$" jednodušší

„$\Rightarrow$" nechť ex. graf se skóre $(d_1, \dots, d_n)$, ukážeme, že ex. graf mající skóre $(d_1, \dots, d_{n-d_n} - 1, \dots, d_{n-1} - 1)$.

$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$

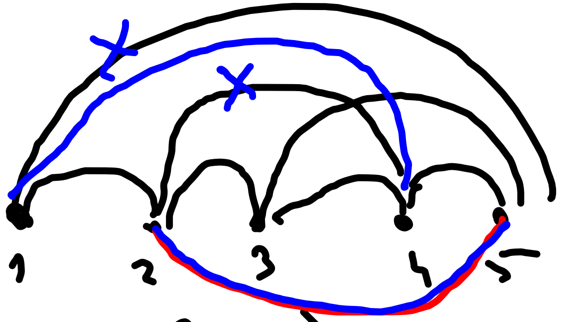
existuje vždy?



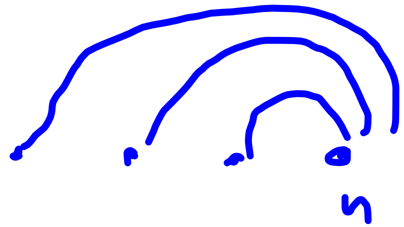
uvažme $\forall$ grafy na n vrcholech se skóre $(d_1, \dots, d_n)$ a pro každý graf G uvažme funkci $j(G)$… největší index vrcholu t., že $\{v_{j(G)}, v_n\} \notin E(G)$.

Ukážeme, že ex. G s $j(G) = n - d_n - 1$

$j(G) = 2$

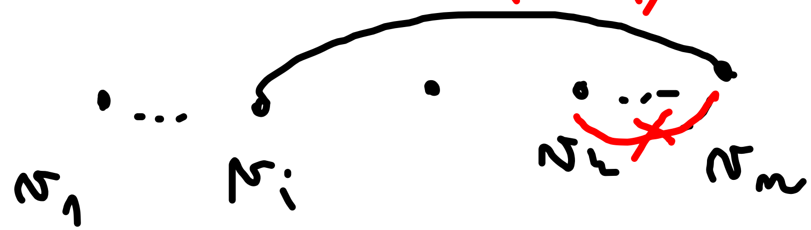


$(2, 3, 3, 3, 3)$



<u>obecně:</u> (sporem) $j(G) > n - d_n - 1$, $\exists k \geq n - d_n : \{v_k, v_n\} \notin E$ $(k = 2)$

$\exists i < n - d_n : \{v_i, v_n\} \in E$ $(i = 1)$ $(j = 4)$



protože $d_i \leq d_k$, ex. m def j:

$\{v_i, v_j\} \notin E$, $\{v_k, v_j\} \in E$

Celkem ex. graf s $j(G) = n - d_n - 1$

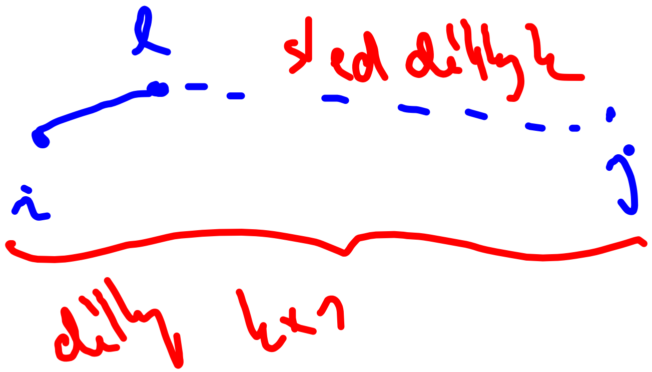
$(A_G^k)_{ij}$ udává počet sledů z i do j délky k

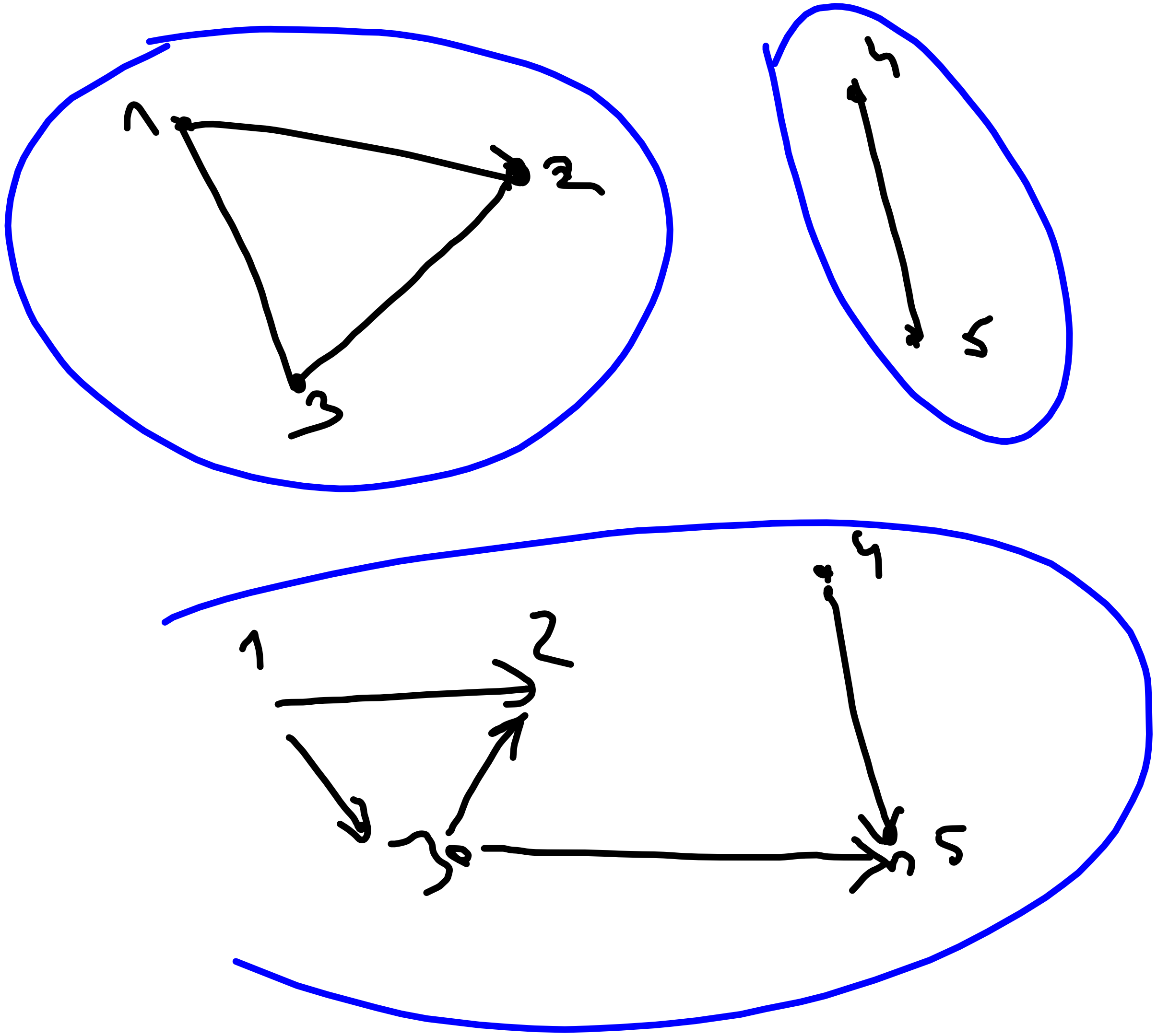
<u>indukce:</u> $k=1$: $(A_G)_{ij}$ … počet sledů délky 1

$k \to k+1$:

$$A_G^{k+1} = \underset{(a_{ij})}{A_G} \cdot \underset{(a_{ij}^{(k)})}{A_G^k} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot a_{lj}^{(k)}$$

\# sledů délky k z l do j

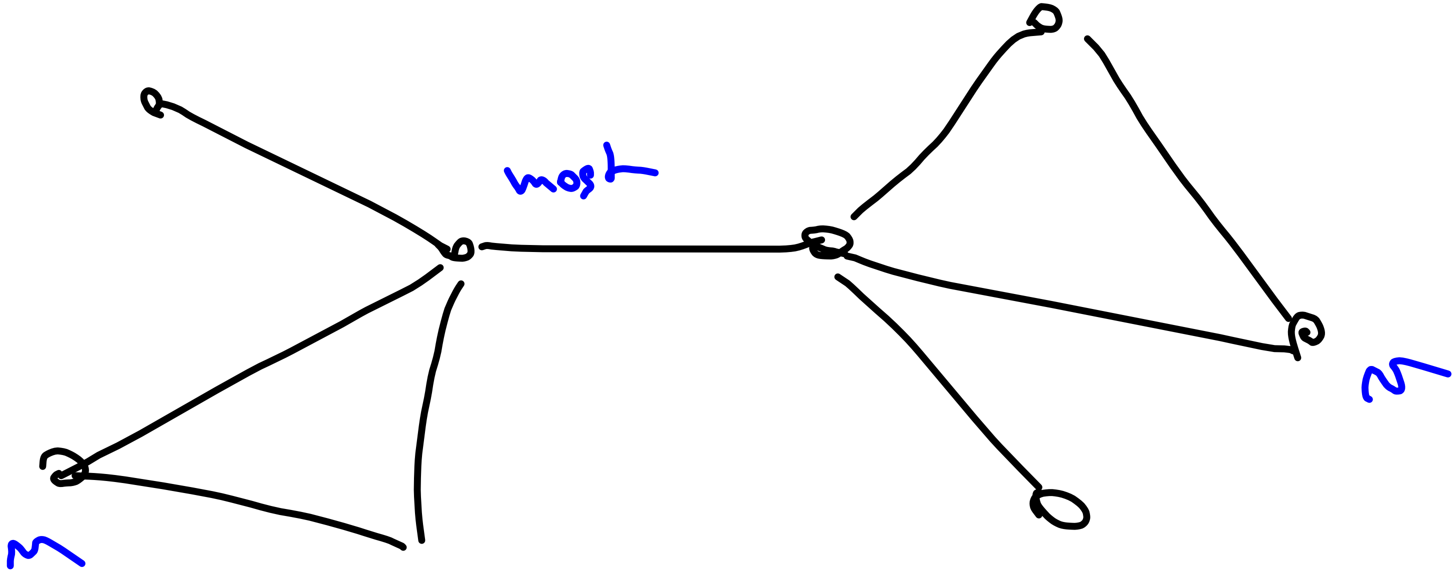




komponenty souvislosti

Alg. (Tarjan) – silně souvislé komponenty v orientovaném grafu

$u \sim v \iff \exists$ cesta z u do v i z v do u



Věta (3) $\Rightarrow$ (1) snadné

(1) $\Rightarrow$ (3) viz [MN]

(2) $\Rightarrow$ (1)

(1) $\Rightarrow$ (2)

G je 2-souvislý

$u \bullet$ $\qquad \bullet\, w$

indukcí podle vzdálenosti u, w

I. $v \overset{e}{—} w$

díky 2-souvislosti víme, že graf $G \setminus \{e\}$ je souvislý (neboť $G \setminus \{v\}$ i $G \setminus \{w\}$ jsou souvislé), ex. tedy cesta z v do w $\Rightarrow$ spolu s e dá kružnici

II. platí pro všechny vzdálenosti $d < k$, dokážeme pro k.

P_1

$$v = v_0 - v_1 - v_2 - \dots v_{k-1} - w = v_k$$

P_2

$d(v, v_{k-1}) = k-1 \overset{IP}{\Rightarrow} \exists$ kružnice na níž leží v i v_{k-1}

Odebereme v_{k-1}, $G \setminus \{v_{k-1}\}$ je souvislý $\Rightarrow \exists$ cesta P' z v_0 do v_k, označme u poslední vrchol na této cestě, který leží na P_1 nebo P_2 (BÚNO na P_1)

Hledaná kružnice je pak