Příklad 2. *Určete definiční obor funkcí:*

a) $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln z$,

b) $f(x,y,z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

a) $y \neq 0 \quad \frac{x}{y} \geq 0$

$z > 0$

I. $y > 0 \Rightarrow x \geq 0$
$z > 0$

II. $y < 0 \Rightarrow x \leq 0$
$z > 0$

b) $-1 \leq \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$ $\quad x \neq 0 \vee y \neq 0$

$-\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$

Příklad 1. *Zobrazte v rovině definiční obory funkcí:*

a) $f(x,y) = \ln(\frac{x}{3} + 2y)$,

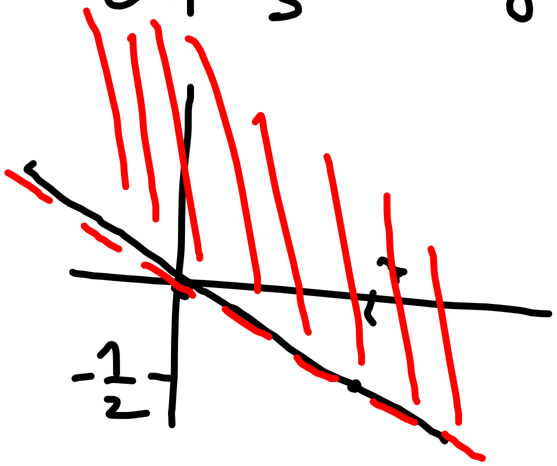
b) $f(x,y) = \sqrt{1 - (\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4})}$,

c) $f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$,

d) $f(x,y) = \arccos \frac{x}{x+y}$.

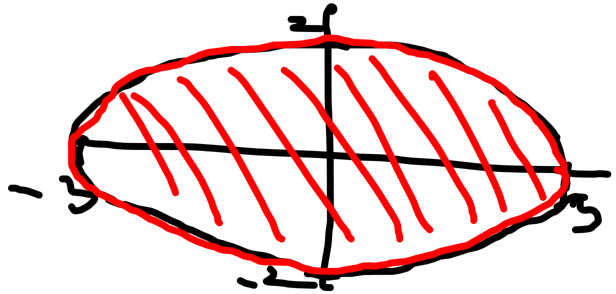
$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

a) $\frac{x}{3} + 2y > 0$



b) $1 \geq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$

$1 \geq \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$

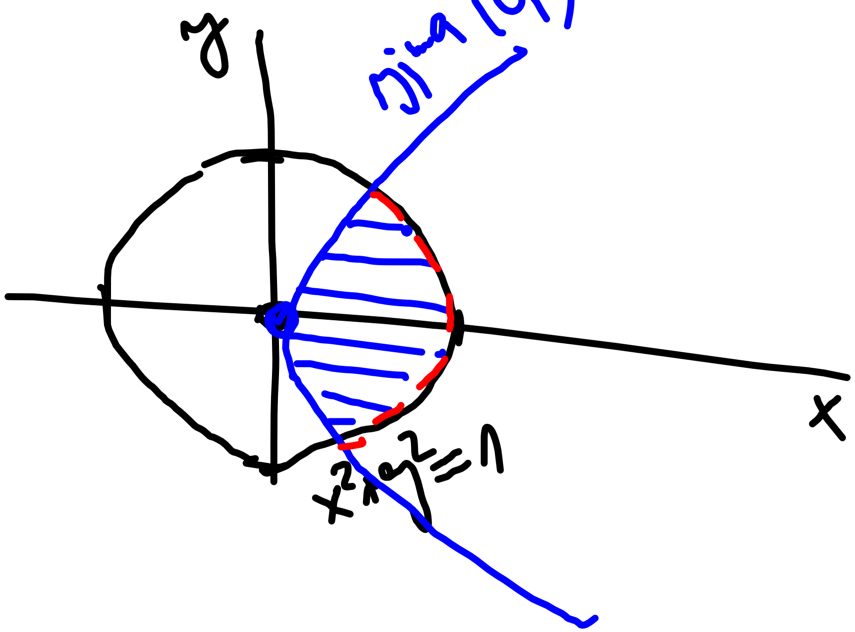


c) $4x - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 4x \Leftrightarrow x \geq \frac{y^2}{4}$

$1 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$

$1 - x^2 - y^2 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \vee y \neq 0$

$\left(\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0 \\ \neg(\quad\quad) \Leftrightarrow x \neq 0 \vee y \neq 0 \end{array} \right)$



d) $\arccos \frac{x}{x+y}$ je def. $\iff$ $\left[x+y \neq 0\right]$

$$\frac{x}{x+y} \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$-1 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1$$

1. $x+y>0$

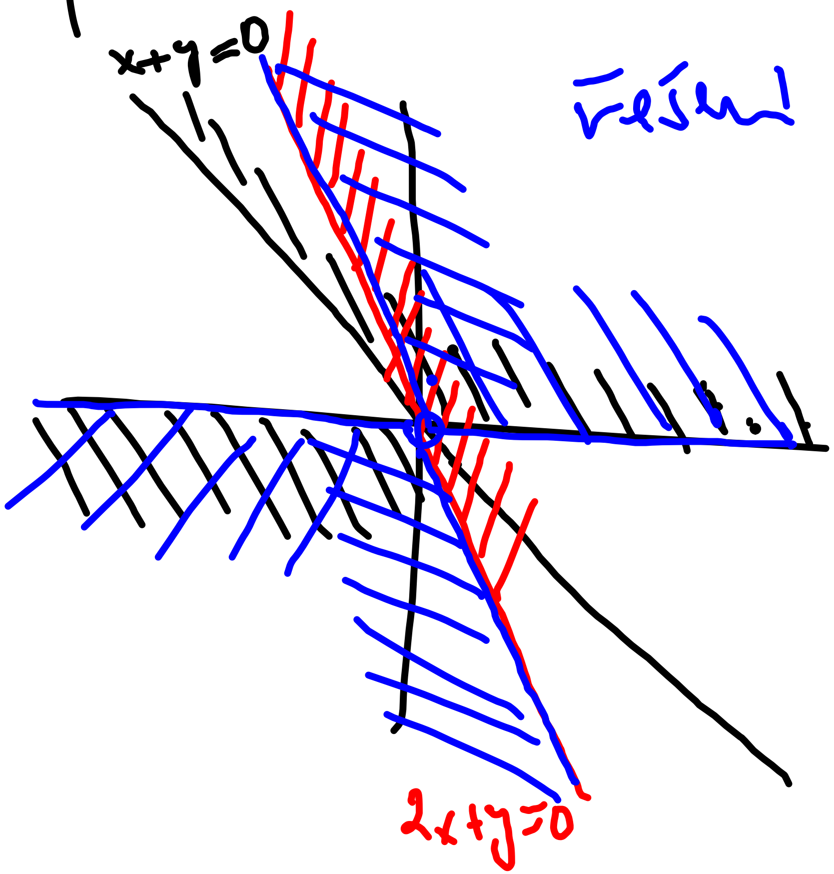
$$-x-y \leq x \leq x+y$$

$$2x \geq -y \wedge 0 \leq y$$

2. $x+y<0$

$$-x-y \geq x \geq x+y$$

$$-y \geq 2x \wedge 0 \geq y$$



řešení!

Příklad 3. *Načrtněte vrstevnice funkcí:*

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$,

b) $f(x,y) = x^y$, $x > 0$

c) $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

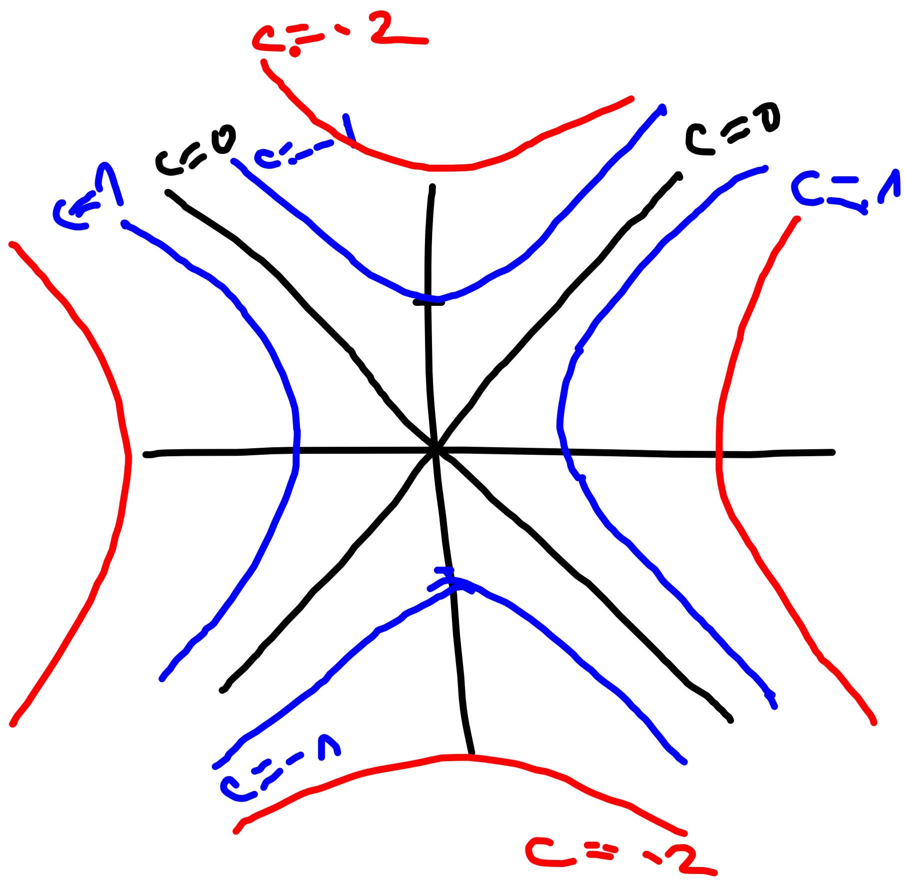
a) $c = x^2 - y^2$

$y^2 = x^2 - c$

$y^2 = x^2 - 1$

$y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$

$y^2 = x^2 + 1$



b) $f(x,y) = x^y \quad | \quad x>0$

$c = e^{y\cdot \ln x} \quad \Rightarrow c>0$

$c=1 \qquad 1 = e^{y\cdot \ln x} \Leftrightarrow y\cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 0 \vee x = 1$

$x \neq 1$

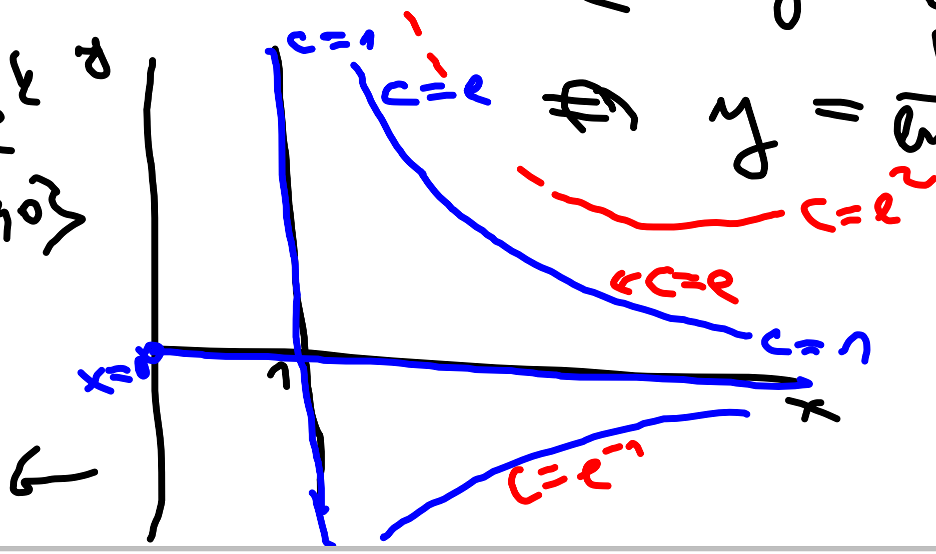
$c=e \qquad e = e^{y\cdot \ln x} \Leftrightarrow y\cdot \ln x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\ln x}$

$$\boxed{\begin{array}{l} c = e^{-1} \\ y = -\frac{1}{\ln x} \end{array}}$$

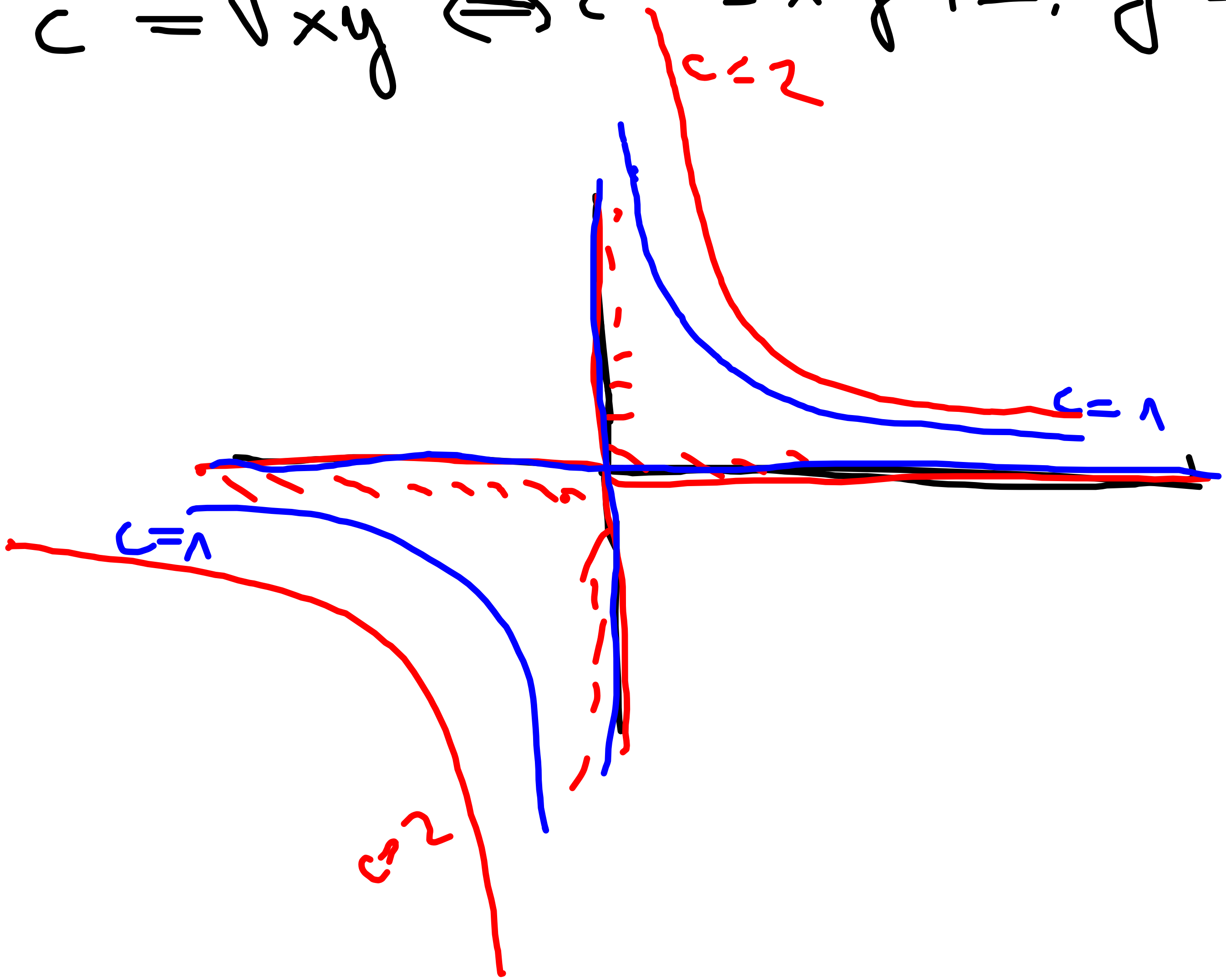
$c = e^{k} \qquad \Leftrightarrow y = \frac{k}{\ln x}$

$k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



c) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ $\qquad c \geq 0 \quad \underline{xy \geq 0}$

$c = \sqrt{xy} \Leftrightarrow c^2 = xy \Rightarrow y = \frac{c^2}{x}$

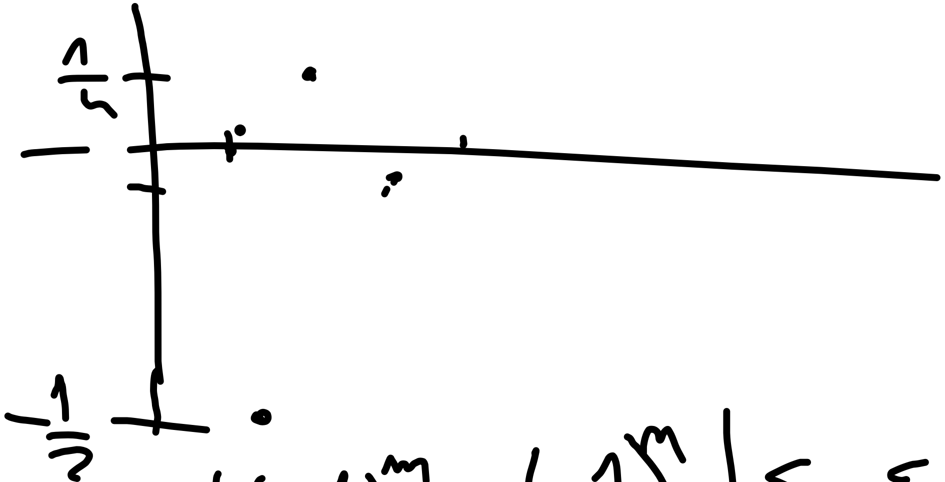


Příklad 4. *Rozhodněte, zda je daná posloupnost cauchyovská:*

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, *kde* $n \in \mathbb{N}$,

b) a^n, *kde* $n \in \mathbb{N}$ *(v závislosti na hodnotě parametru* $a \in \mathbb{R}$*).*

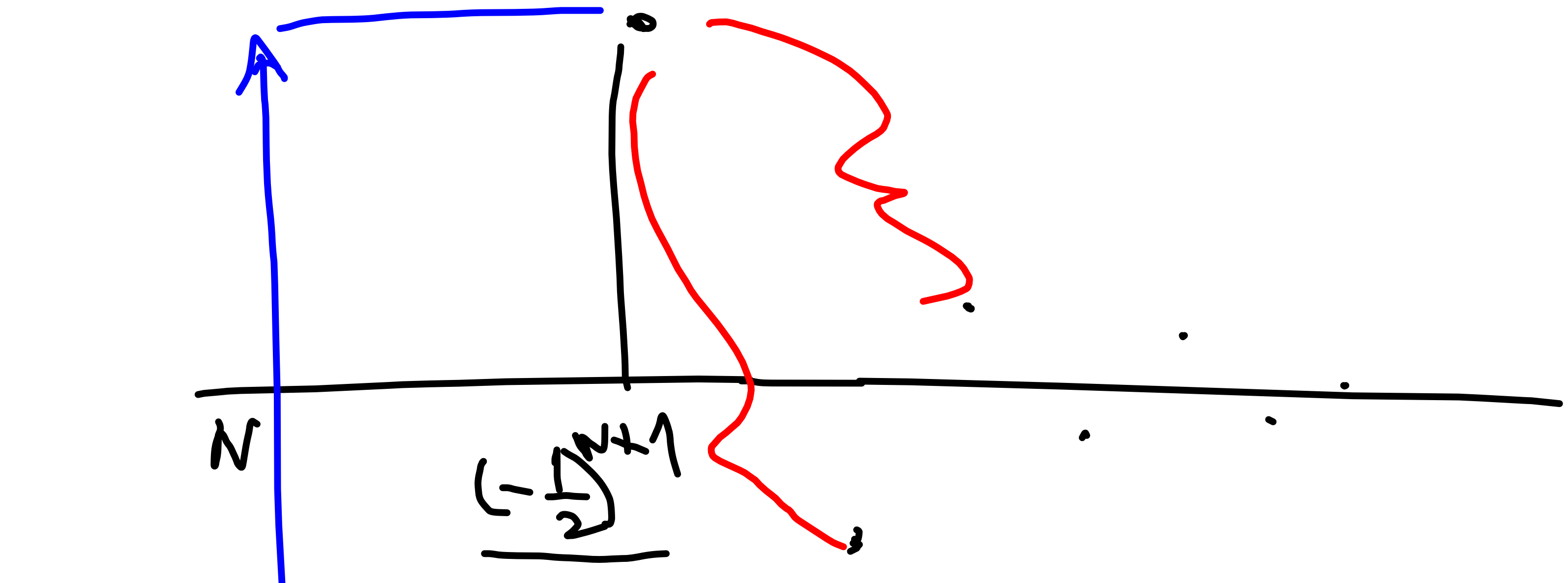
c) $\frac{n+1}{n^2}$.



a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$\forall m,n > \underline{\underline{N(\varepsilon)}} : \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^m - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| < \varepsilon$$

$$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right| < \varepsilon$$



$\left(-\frac{1}{2}\right)^{N}$

$$\frac{1}{2^N}+\frac{1}{2^{N+1}}=\frac{3}{2}\cdot 2^{-N}<\varepsilon$$

$$\frac{3}{2\varepsilon}<2^N$$

$$\boxed{\log_2\frac{3}{2\varepsilon}<N}$$

b) a^n, $n \in \mathbb{N}$

cauchyovská pro $a \in (-1,1)$ [anal. jako a_1]

$a = 1$

není cauchyovská pro ostatní a

(i $a = -1$)

$\{x^2 < 2;\ x > 0,\ x \in \mathbb{Q}\}$

c) $\frac{n+1}{n^2} \quad n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n+1}{n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{n} \longrightarrow 0$$

je konvergentní $\Rightarrow$ je cauchyovská

Je treba nájsť $N(\varepsilon) =: N$

$$\frac{N+1}{N^2} - \frac{N+2}{(N+1)^2} < \varepsilon$$

Příklad 5. *Určete všechny hromadné body množiny:*

a) $\mathbb{Z}$,

b) $\mathbb{Q}$,

c) $\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, posloupnost

d) $\{3(1 - \frac{1}{n}) + 2(-1)^n; n \in \mathbb{N}\}$.

a) neexistuje

b) $1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{8}, 1+\frac{1}{16}, \dots \to 1$

c) jako posl.: je hrom. bodem každé $n \in \mathbb{N}$

d) $3(1-\frac{1}{n}) \to 3$

podposl. $n=2k \to 3+2$ hr. body

$n=2k-1 \to 3-2$

Příklad 6. *Určete tečnu křivky dané předpisem*

$$f(t) = (2\cos t + \cos 3t, \sin 2t, t)$$

v bodě $t = \frac{3\pi}{2}$.

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(0, 0, \frac{3\pi}{2}\right)$

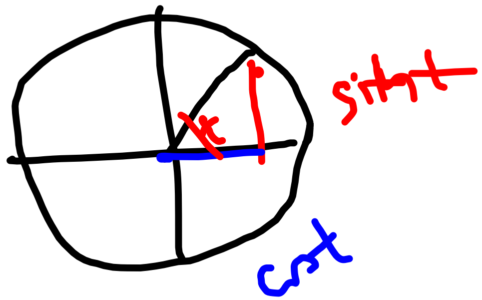
$f'(t) = (-2\sin t - 3\sin 3t, 2\cos 2t, 1)$

$t_0 = \frac{3\pi}{2}$

$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (2 - 3\cdot 1, -2, 1) = (-1, -2, 1)$

tečna: $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot \tau + \left(0, 0, \frac{3\pi}{2}\right)$

$(-1, -2, 1)\cdot \tau + \left(0, 0, \frac{3\pi}{2}\right)$



Příklad 7. *Na křivce (t, t^2, t^3) najděte takový bod, že jím procházející tečna je rovnoběžná s rovinou $x+2y+z=1$.*

normálový vektor roviny $(1,2,1)$

$f'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, pro které t platí, že

$(1, 2t, 3t^2) \perp (1,2,1) \Leftrightarrow$

$$1\cdot 1 + 2t\cdot 2 + 3t^2\cdot 1 = 0$$

$$3t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$D = 16 - 12 \qquad t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \end{matrix}}$$

Příklad 8. *Vypočtěte limity:*

a) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$,

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^2 \cos\frac{1}{xy^2}$,

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}$,

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$,

f) $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$,

g) $\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} (1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$.

a) $\frac{1+1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

b) $= \lim \frac{\cancel{(x^2+y^2)}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{\cancel{(x^2+y^2+1)-1}} = 2$

c) $f(\vec{x})$ je ohraničená

$g(\vec{x}) \to 0$

$f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) \to 0$

$xy^2 \to 0 \quad \left|\cos\frac{1}{xy^2}\right| \leq 1$

$\Rightarrow \lim = 0$

Příklad 9. *Dokažte, že následující limity neexistují:*

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$,

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$.