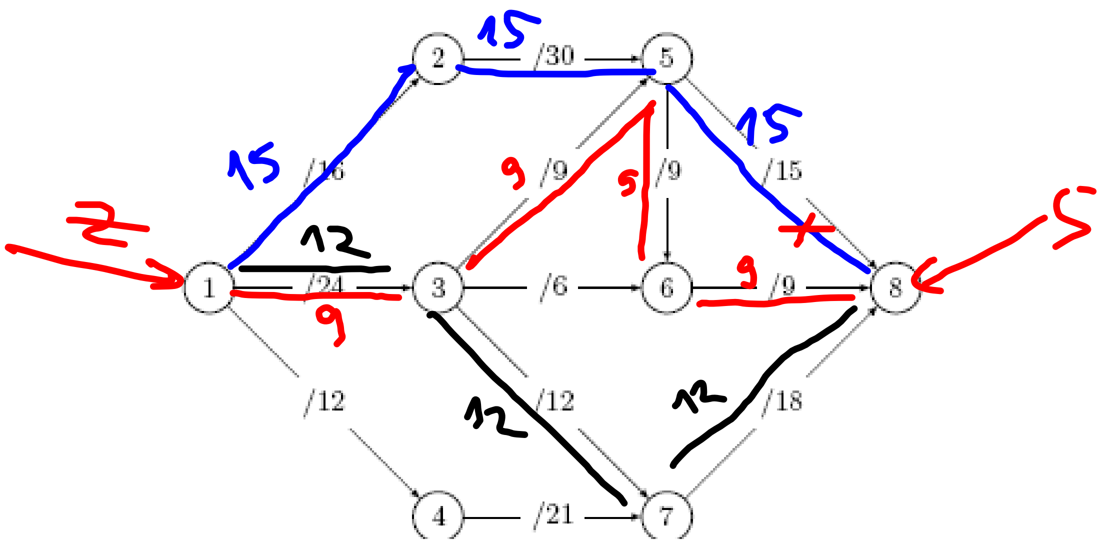
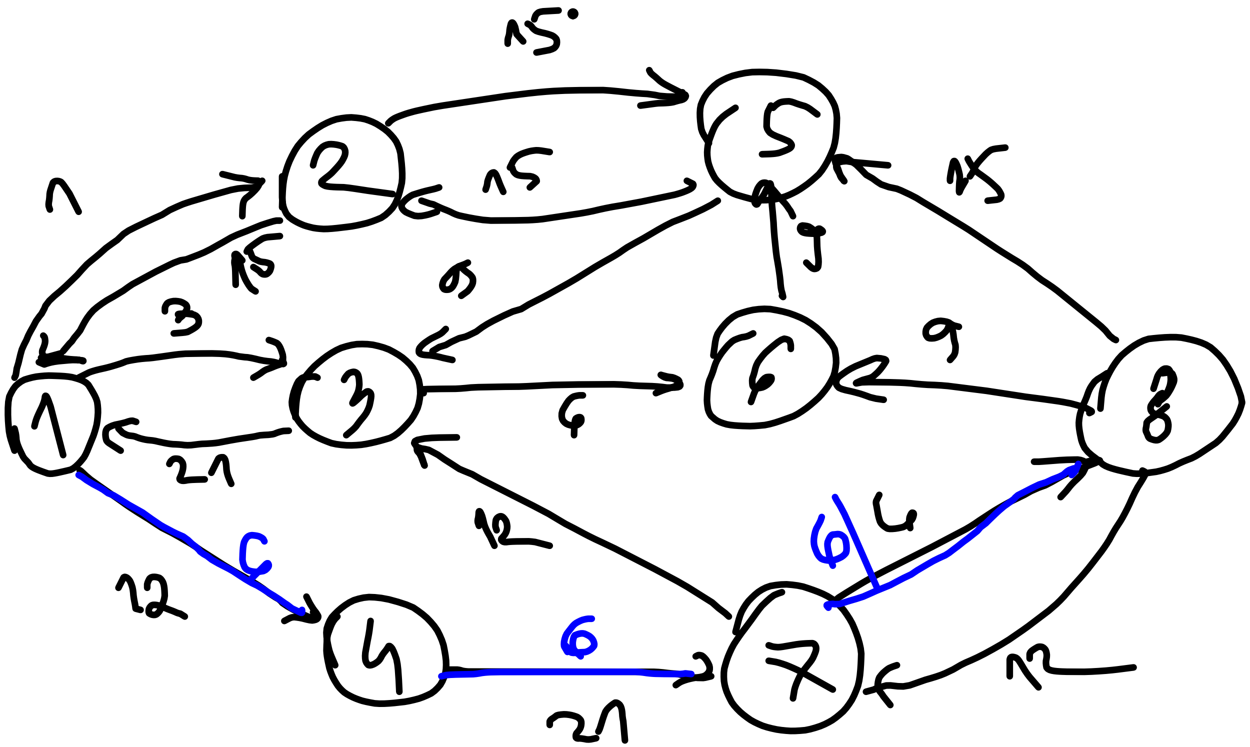
tok 36

**8. demonstrační cvičení**

**Příklad 70.** *Určete hodnotu maximálního toku a najděte minimální řez v síti dané maticí kapacit A, kde vrchol 1 je zdroj a vrchol 8 stok.*

$$A = \begin{pmatrix} - & 16 & 24 & 12 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 30 & - & - & - \\ - & - & - & - & 9 & 6 & 12 & - \\ - & - & - & - & - & - & 21 & - \\ - & - & - & - & - & 9 & - & 15 \\ - & - & - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - & 18 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$



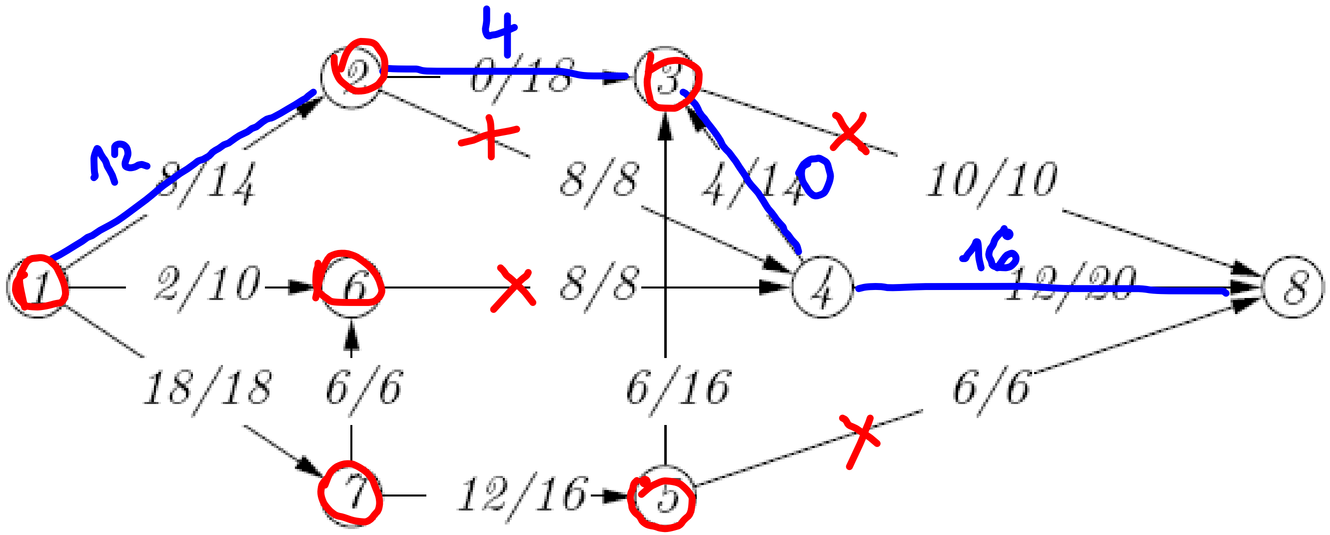



$\exists$ cesta z 1 do 8 : $1 \to 4 \to 7 \to 8$

rezerva 6

Tok 42, řez $\begin{matrix} 5,8 \\ 6,8 \\ 7,8 \end{matrix}$ velikost: 42 $\Rightarrow$ max. tok, min. řez

**Příklad 71.** *Na obrázku je uveden tok v dané síti (čísla f/c udávají současný tok a kapacitu dané hrany). Zjistěte, je-li uvedený tok maximální, pokud ano, své tvrzení zdůvodněte. Pokud maximálním tokem není, maximální tok najděte a svůj postup podrobně popište. Uveďte některý minimální řez v dané síti.*




1,2,3,4,8 : zlepšující polocesta rezerva 4

⇒ tok 32

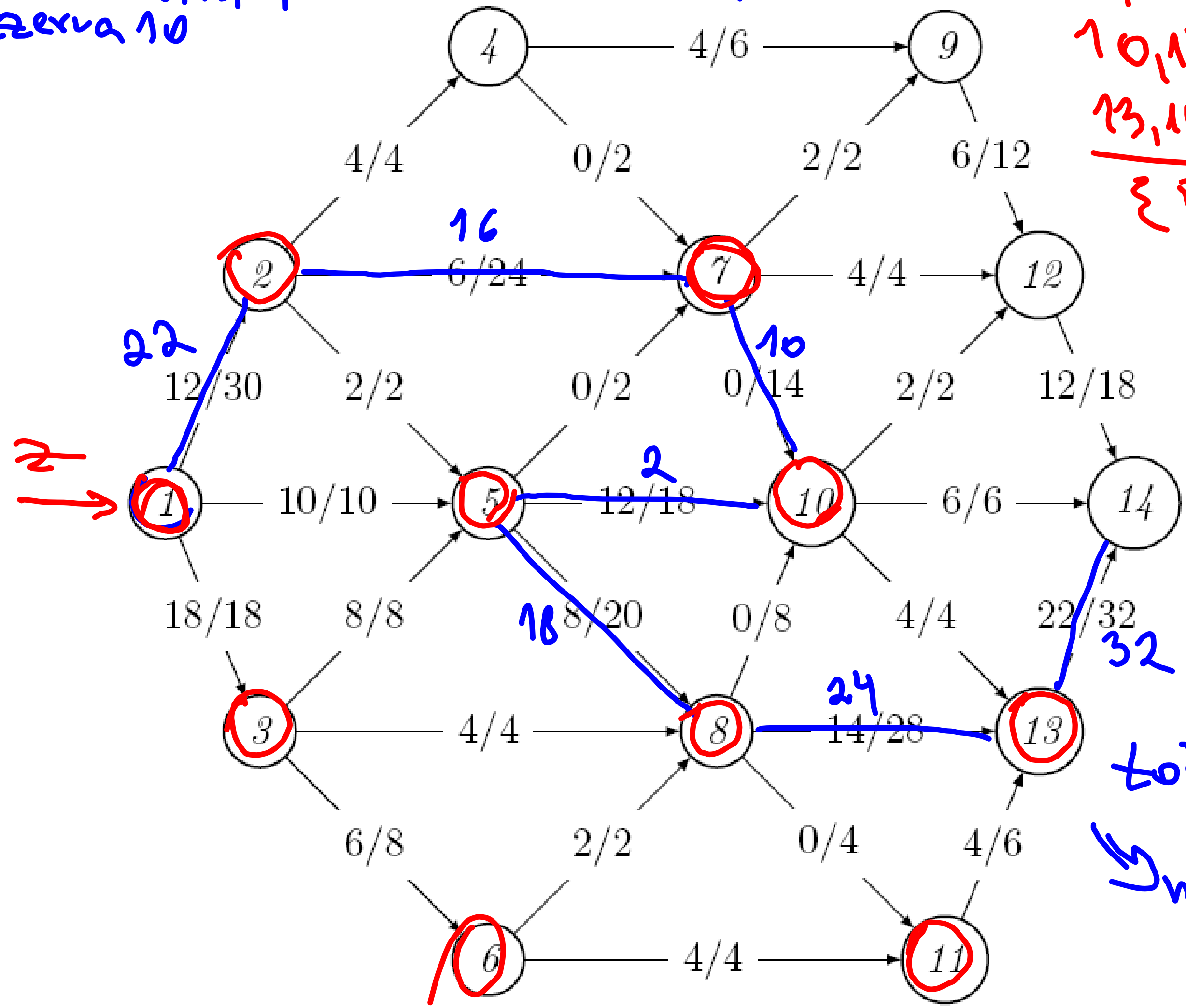
řez: 3,8 10
6,4 8
5,8 6
~~4,3~~
2,4 8

⇒ max. tok 32

**Příklad 72.** *Nalezněte maximální tok a minimální řez v síti na obrázku (zdroj=1,stok=14).*

1,2,7,10,5,8,13,14
rezerva 10

min. řez: 2,4 : 4
7,9 : 2
7,12 : 4
10,12 : 2
10,14 : 6
13,14 : 32
Σ 50




tok 50

⇒ max. tok

**Příklad 73.** *(a) Určete vytvořující funkci posloupnosti*

$$(9, 0, 0, 2 \cdot 16, 0, 0, 4 \cdot 25, 0, 0, 8 \cdot 36, \ldots).$$

*(b) Určete vytvořující funkci posloupnosti*

$$(9, 1, -9, 32, 1, -32, 100, 1, -100, \ldots, ).$$

$$\frac{1}{1-x} \xleftrightarrow{\text{v.f.p.}} (1, 1, 1, \ldots)$$

$$\left.\begin{array}{l} A(x) \xleftrightarrow{\text{v.f.s.}} (a_n) \\ B(x) \xleftrightarrow{\text{v.f.p}} (b_n) \end{array}\right\} \begin{array}{l} A(x) + B(x) \xleftrightarrow{\text{v.f.s.}} (a_n + b_n) \\ A(x) \cdot B(x) \xleftrightarrow{\text{v.f.s.}} (c_n) \\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \end{array}$$

$$\underline{\underline{A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}}$$

Př.: $\dfrac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \dfrac{\frac{1 - 1 + x}{1-x}}{x} = \dfrac{1}{1-x}$

shift $(1, 1, 1, \ldots)$ o 1 doleva

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{zderivujeme}$$

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cdot x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} \cdot x^m$$

$$A'(x) \xleftrightarrow{\text{v.f.p.}} (a_1, 2 \cdot a_2, 3a_3, 4 \cdot a_4, \dots)$$

? vytv. fci posl. $(1^2, 2^2, 3^2, \dots)$

$$\frac{1}{1-x} \xleftrightarrow{\text{v.f.p.}} (1, 1, \dots)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \longleftrightarrow (1, 2, 3, 4, \dots) \Rightarrow \frac{x}{(1-x)^2} \longleftrightarrow (0, 1, 2, 3, 4)$$

deriv.: $\dfrac{(1-x)^2 + x \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} \longleftrightarrow (1^2, 2^2, 3^2, \dots)$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$(1\cdot 3^2,\ 2\cdot 4^2,\ 2^2\cdot 5^2,\ 2^3\cdot 6^2,\ \dots)$$

$$\boxed{\dfrac{\dfrac{1+x}{(1-x)^3}-(1+4x)}{x^2}} \xleftrightarrow{\text{v.f.s}} (3^2, 4^2, 5^2, \dots)$$

$$A(x) \longleftrightarrow (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

$$A(2x) \longleftrightarrow (a_0\cdot 2^0, a_1\cdot 2^1, a_2\cdot 2^2, \dots)$$

$$C(x) = \frac{1}{(2x^3)^2}\cdot\left[\frac{1+2x^3}{(1-2x^3)^3} - 1 - 8x^3\right] \xleftrightarrow{\text{v.f.p.}} (2^0\cdot 3^2, 2^1\cdot 4^2, 2^2\cdot 5^2, 2^3\cdot 6^2, \dots)$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \longleftrightarrow (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

$$A(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n} \longleftrightarrow (a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, \dots)$$

$$(9, 1, -9, 32, 1, -32, 100, 1, -100, \ldots, ).$$

$$C(x) \overset{\text{v.f.p.}}{\longleftrightarrow} (9, 0, 0, 32, 0, 0, 100, 0, 0, \ldots)$$

$$\frac{x}{1-x^3} \longleftrightarrow (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

$$-x^2 C(x) \overset{\text{v.p.s.}}{\longleftrightarrow} (0, 0, -9, 0, 0, -32, 0, 0, -100, \ldots)$$

$$C(x)\left[1 - x^2\right] + \frac{x}{1-x^3}$$

**Příklad 74.** *S využitím vytvořujících funkcí řešte rekurenci*

$$a_{n+2} = a_n + n \quad (\text{pro } n \in \mathbb{N}), \quad a_0 = a_1 = 0.$$

*Vyjádřete $a_n$ jako funkci $n$ jediným vzorcem bez rozlišování parity $n$.*

$$[\text{predikát}] = \begin{cases} 1 & \text{predikát platí} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- zapíšeme rekurenci tak, aby platila $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{pmatrix} a_{-1} = 0 \\ a_{-2} = 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$
- vždy rovnici vynásobíme vhodnou mocninou x a sečteme

$$a_n = a_{n-2} + n - 2 + [n=1] + 2[n=0] \quad / \cdot x^n$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n-2) x^n + x + 2$$

$$A(x) = x^2 \cdot A(x) + \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n - 2 \sum x^n + x + 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^n \overset{v.f.p.}{\Longleftrightarrow} (0,1,2,3,4,\dots)$$

$$\frac{1}{1-x} \longleftrightarrow (1,1,1,\dots)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \longleftrightarrow (1,2,3,4,\dots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

---

$$A(x)\left[1-x^2\right] = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{2}{1-x} + x + 2$$

$$= \frac{\cancel{x} - \cancel{2} + \cancel{2x} + \cancel{x} - \cancel{2x^2} + x^3 + \cancel{2} - \cancel{4x} + \cancel{2x^2}}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{x^3}{(1-x^2)(1-x)^2}$$

$$\frac{a_0}{1-qx} = a_0 + a_0 q x + a_0 q^2 x^2 + \dots$$

rozložíme $A(x)$ na parc. zlomky:

$$A(x) = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{(1-x)^2} + \frac{D}{(1-x)^3}$$

$$\frac{x^3}{(1+x)(1-x)^3} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{5}{4}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^3}$$

$$x^3 = A(1-x)^3 + B(1+x)(1-x)^2 + C(1+x)(1-x) + D(1+x)$$

$x=0$: $0 = A+B+C+D$

$1 = 2D$

$-1 = 8A$

$\frac{1}{8} = \frac{1}{8}A + \frac{3}{8}B + \frac{3}{4}C + \frac{3}{2}D \iff 1 = A+3B+6C+12D$

$$\boxed{\begin{aligned} D &= \tfrac{1}{2} \\ A &= -\tfrac{1}{8} \end{aligned}}$$

$B+C = -\frac{3}{8}$ $\qquad$ $8B+8C = -3$

$3B+6C = -\frac{39}{8} \iff 8B+16C = -13$

$$\boxed{\begin{aligned} C &= -\tfrac{5}{4} \\ B &= \tfrac{7}{8} \end{aligned}}$$

$$-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+x} = -\frac{1}{8}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n$$

$$\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{7}{8}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}1\cdot x^n$$

$$-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} = -\frac{5}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot x^n$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n$$

$(n+1)$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \longleftrightarrow (1,2,3,4,\dots)$$

$(n+1)(n+2)$

$$\frac{2}{(1-x)^3} \longleftrightarrow (1\cdot 2, 2\cdot 3, 3\cdot 4, \dots)$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} \longleftrightarrow a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

---

$$a_n = -\frac{1}{8}(-1)^n + \frac{7}{8} - \frac{5}{4}n + \frac{1}{4}(n+1)(n+2)$$