$d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}$,

$e)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$,

$f)\ \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$,

$g)\ \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} (1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$.

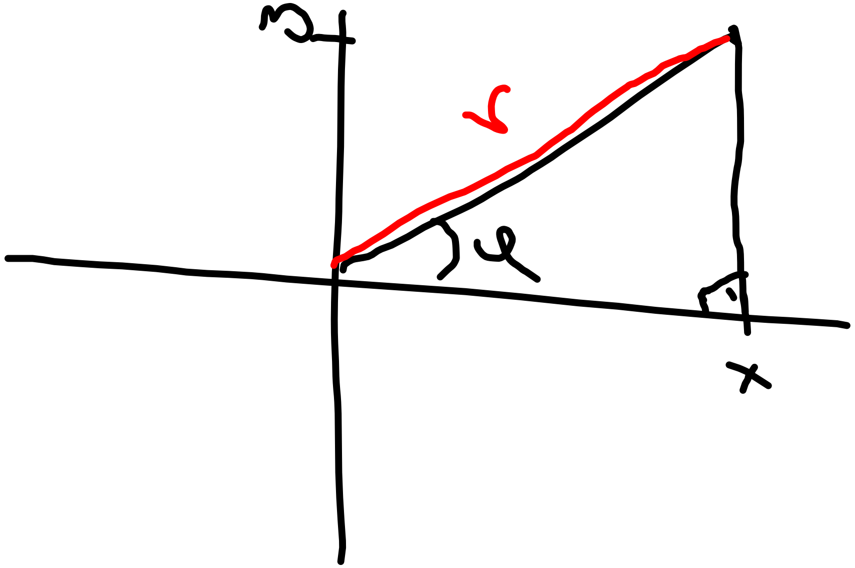
$$d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}\cdot y = \lim \frac{\sin xy}{x\cdot y}\cdot \lim y =$$

$$\left| t = xy \right| = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 1\cdot 0 = 0$$

$$e)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \left| \begin{array}{l} y = k\cdot x \\ k \text{ konst} \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(k^3+1)}{x^2(k^2+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x\cdot \frac{(k^3+1)}{k^2+1}$$

zatím neprokázána neexistence




$$\frac{y}{r} = \sin\varphi$$

$$\frac{x}{r} = \cos\varphi$$

$r \in \mathbb{R}^+$

$\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

$$\lim \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r\,(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 0$$

$\to 0$

ohraničená

$-2 \le \ldots \le 2$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)\, e^{-(x+y)} =$

$$= \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right| = \lim_{r\to+\infty} r^2 \cdot e^{-r(\cos\varphi+\sin\varphi)}$$

$\lim (x^2+y^2)\, e^{-(x+y)}$

$$\le \lim (x+y)^2 \cdot e^{-(x+y)} = \left| t = x+y \right| = \lim_{t\to\infty} t^2 \cdot e^{-t} = 0$$

---

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x e^{-x} = 0$$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} =$

$$= \lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2+xy}{x+y} - \frac{xy}{x+y}}$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=$$

$$= \lim \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{xy}{x+y}}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,1)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}}} = \frac{e}{1}$$

$\frac{1}{y}+\frac{1}{x} \to 1$

$= e$

**Příklad 9.** *Dokažte, že následující limity neexistují:*

*a)* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$,

*b)* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$.

a) $\lim \frac{xy}{x^2+y^2} = \left| \begin{array}{l} y=kx \\ k \text{ konst.} \end{array} \right| =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{k\cdot \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(k^2+1)} = \frac{k}{k^2+1}$ závisí na $k \Rightarrow \lim$ neexistuje

b)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\,xy} = \left| \begin{array}{l} y = k\cdot x \\ k \text{ konst.} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(x^2(k^2+1)\right)}{k\cdot x^2\cdot x^2(k^2+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left((k^2+1)x^2\right)}{x^4\cdot k(k^2+1)}$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left((k^2+1)\cdot x^2\right)\cdot 2\cancel{x}\cdot\cancel{(k^2+1)}}{k\cancel{(k^2+1)}\cdot 4\cdot x^{\cancel{3}\,2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin\left((k^2+1)\cdot x^2\right)}{(k^2+1)\cdot x^2}}_{\to 1} \cdot \frac{(k^2+1)}{2k} = \frac{k^2+1}{2k}$$

závisí na k

$\Rightarrow$ neex.

**Příklad 10.** *Vypočtěte všechny parciální derivace (i smíšené) funkce*

$$f(x,y) = x^4 + 10x^2y^3 - 2y^6$$

*až do řádu 3 včetně.*

$$f'_x(x,y) = 4x^3 + 20x \cdot y^3, \quad f'_y(x,y) = 30x^2y^2 - 12y^5$$

$$f''_{xx}(x,y) = 12x^2 + 20y^3$$

$$f''_{xy}(x,y) = 60xy^2 = f''_{yx}(x,y) = \underline{60xy^2}$$

$$f'''_{xxx}(x,y) = 24x$$

$$f'''_{xxy}(x,y) = 60y^2, \ldots \quad f'''_{yxx} = 60y^2$$

$$d_u f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}+t\cdot u) - f(\vec{x})}{t}$$

**Příklad 11.** *Určete směrovou derivaci funkce* $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$ *v bodě* $[-1,1]$ *ve směru vektoru* $(1,2)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\left((-1+t\cdot 1)^2 + (1+t\cdot 2)^2\right) - \operatorname{arctg}((-1)^2+1^2)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(1-2t+t^2+1+4t+4t^2) - \operatorname{arctg} 2}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(2+2t+5t^2) - \operatorname{arctg} 2}{t} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim \frac{\frac{2+10t}{1+(2+2t+5t^2)^2}}{} = \frac{2}{5}$$

**Příklad 12.** *Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí*

*a)* $f(x,y) = x^{xy}$, $= e^{xy \cdot \ln x}$

*b)* $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$.

a) $f_x(x,y) = x^{xy} \cdot y \cdot (\ln x + 1)$

$f_y(x,y) = x^{xy} \cdot x \cdot \ln x$

b: $f_x(x,y) = \dfrac{\frac{1+xy - y(x-y)}{(1+xy)^2}}{1+\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)^2} = \dfrac{1+y^2}{(1+xy)^2+(x-y)^2} =$

$= \dfrac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2} = \dfrac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$df(x_0,y_0) = \underline{f'_x(x_0,y_0)\cdot dx + f'_y(x_0,y_0)\cdot 1\cdot dy}$$

za určitých podmínek

$$\left( \int : (f'_x, f'_y) \cdot (dx, dy) \right)$$

skal. součin

**Příklad 13.** *Určete diferenciál v daném bodě:*

*a)* $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$ *v bodě* $[1,1]$,

*b)* $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *v bodě* $[1,\sqrt{3}]$.

a) $f_x(x,y) = y + \frac{1}{y}$ $\quad f_x(1,1) = 2$

$f_y(x,y) = x - \frac{x}{y^2}$ $\quad f_y(1,1) = 0$

$$df(x,y) = f_x(x,y)\cdot dx + f_y(x,y)\,dy =$$

$$= 2\,dx + 0\cdot dy$$

b) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v $[1,\sqrt{3}]$

$$f_x(x,y) = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}} = \frac{\dfrac{\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}}{\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}}{\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$f_x(1,\sqrt{3}) = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}}$ ✓

Spočítejme PŘ 1 jednodušeji!:

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$$

$$f'_x = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}, \quad f'_x(-1,1) = \frac{-2}{5}$$

$$f'_y = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}, \quad f'_y(-1,1) = \frac{2}{5}$$

$$u = (1,2)$$

---

$$df(-1,1) = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy =$$

$$= -\frac{2}{5} \cdot dx + \frac{2}{5} \cdot dy \Rightarrow d_u f(-1,1) =$$

$$= -\frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{2}{5}$$

**Příklad 14.** *Rozhodněte, zda je funkce*

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

*diferencovatelná v* $[0,0]$.

**Příklad 15.** *Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte:*

*a)* $\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05}$,

*b)* $1,04^{2{,}02}$.